Matematika 2

Gregor Dolinar

Fakulteta za elektrotehniko
Univerza v Ljubljani

30. maj 2014

Definicija

Diferencialna enačba oblike

$$x^2 y''(x) + xay'(x) + by(x) = r(x),$$

pri čemer sta $a, b \in \mathbb{R}$ konstanti, se imenuje Eulerjeva diferencialna enačba.

Zapisana diferencialna enačba je homogena, če je $r(x) = 0$ za vsak x.

Homogeno Eulerjevo diferencialno enačbo

$$x^2y''(x) + xay'(x) + by(x) = 0$$

rešimo tako, da jo s substitucijo

$$x = e^t$$

prevedemo na homogeno linearno diferencialno enačbo s konstantnimi koeficienti.

Ker je

$$dx = e^t dt, \quad \text{torej} \quad \frac{dt}{dx} = \frac{1}{e^t},$$

in velja

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx},$$

dobimo

$$y' = \dot{y}e^{-t}$$

in

$$y'' = \frac{dy'}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = (-e^{-t} \cdot \dot{y} + e^{-t}\ddot{y})e^{-t}.$$

Vstavimo dobljeno v diferencialno enačbo

$$x^2y''(x) + xay'(x) + by(x) = 0$$

in dobimo

$$e^{2t}(-e^{-t} \cdot \dot{y} + e^{-t}\ddot{y})e^{-t} + ae^t\dot{y}e^{-t} + by = 0,$$

oziroma

$$\ddot{y} + (a-1)\dot{y} + by = 0.$$

Dobili smo linearno diferencialno enačbo s konstantnimi koeficienti, ki jo znamo rešiti.

Zapišemo karakteristično enačbo

$$\lambda^2 + (a-1)\lambda + b = 0.$$

Ločimo tri primere. Karakteristična enačba ima lahko

- dve različni realni rešitvi
- dve različni konjugirani kompleksni rešitvi
- eno realno rešitev

Karakteristična enačba ima dve različni realni rešitvi $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Potem je

$$y_1 = e^{\lambda_1 t} = (e^t)^{\lambda_1} = x^{\lambda_1}$$

in

$$y_2 = e^{\lambda_2 t} = (e^t)^{\lambda_2} = x^{\lambda_2}.$$

Potem sta x^{λ_1} in x^{λ_2} linearno neodvisni rešitvi, saj

$$\frac{x^{\lambda_1}}{x^{\lambda_2}} = x^{(\lambda_1 - \lambda_2)}$$

ni konstantna funkcija.
Splošna rešitev homogene LDE s konstantnimi koeficienti je potem

$$y(x) = C_1 x^{\lambda_1} + C_2 x^{\lambda_2}.$$

Karakteristična enačba ima dve različni kompleksni rešitvi $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$, $\lambda_1 = p + \mathrm{i}q \neq \lambda_2 = p - \mathrm{i}q$.
Splošna rešitev diferencialne enačbe je potem

$$y = e^{pt}(D_1 \cos(qt) + D_2 \sin(qt)),$$

oziroma

$$y = x^p(D_1 \cos(q \log x) + D_2 \sin(q \log x)).$$

Karakteristična enačba ima eno realno rešitev $\lambda \in \mathbb{R}$.
Splošna rešitev diferencialne enačbe je potem

$$y = C_1 e^{\lambda t} + C_2 t e^{\lambda t},$$

oziroma

$$y = C_1 x^{\lambda} + C_2 \log(x) \cdot x^{\lambda}.$$

Hitro opazimo, da v vseh rešitvah nastopa funkcija oblike x^λ. Če bi iskali rešitev homogene Eulerjeve diferencialne enačbe z nastavkom $y(x) = x^\lambda$, bi dobili isto kakrakteristično enačbo, saj je

$$x^2\lambda(\lambda-1)x^{\lambda-2} + ax\lambda x^{\lambda-1} + bx^\lambda = 0,$$

torej

$$\lambda(\lambda-1) + a\lambda + b = 0.$$

Vendar v zadnjih dveh primerih ni očitno, kaj bi bila splošna rešitev diferencialne enačbe.

Primer

$$x^2y'' - \frac{3}{2}xy' - \frac{3}{2}y = 0.$$

Primer

$$x^2y'' - 3xy' + 4y = 0.$$

Primer

$$x^2y'' + 7xy' + 13y = 0.$$

Na enak način lahko rešimo tudi homogeno linearno diferencialno enačbo s kostantnimi koeficienti ali Eulerjevo diferencialno enačbo višjega reda.
Pri večkratnih ničlah dobi linearno nedovisne rešitve tako, da množimo eksponentno funkcijo s potencami višje stopnje.
Linearno neodvisnost rešitev lahko preverimo z determinanto Wronskega ustrezne dimenzije.

Primer

$$y^{(5)} - 3y^{(4)} + 3y^{(3)} - y'' = 0.$$

Doslej smo obravnavali dva tipa diferencialnih enačb, pri čemer smo se omejili na homogene DE.
Oglejmo si, kako v nekaterih primerih poiščemo rešitev nehomogene diferencialne enačbe

Izrek

Naj bo y_h splošna rešitev homogene linearne diferencialne enačbe

$$y''(x) + f(x)y'(x) + g(x)y(x) = 0$$

in y_p katerakoli partikularna rešitev nehomogene linearne diferencialne enačbe

$$y''(x) + f(x)y'(x) + g(x)y(x) = r(x).$$

Potem je splošna rešitev nehomogene linearne diferencialne enačbe

$$y = y_h + y_p.$$

Torej, da poiščemo splošno rešitev nehomogene linearne DE, moramo poiskati splošno rešitev homogene linearne DE in eno (katerokoli)rešitev nehomogene DE.

Ogledali si bomo dva načina, kako poiskati partikularno rešitev nehomogene DE:

- metoda nedoločenih koeficientov
- metoda variacije konstante

Iskanje partikularne rešitve z metodo nedoločenih koeficientov pri linearni DE s konstantnimi koeficienti.
V primeru, da je funkcija r na desni strani DE "lepa", na primer polinom, e^x, $\sin x$, $\cos x$, iščemo partikularno rešitev z nastavkom, ki je funkcija enake vrste kot r.

Če je

$$r(x) = a_n x^n + \ldots, a_1 x + a_0,$$

potem je nastavek

$$y_p(x) = b_n x^{n+q} + \ldots, b_1 x + b_0$$

(v diferencialni enačbi lahko na primer ne nastopa y in potem je $q > 0$).

Primer

$$y'' + 4y = 8x^2$$

Če je r trigonometrična funkcija, na primer

$$r(x) = \sin(5x),$$

potem je nastavek

$$y_p(x) = A_1 \sin(5x) + A_2 \cos(5x).$$

Primer

$$y'' - y' - 2y = 10 \cos x$$

Če je

$$r(x) = e^{\mu x},$$

potem je nastavek

$$y_p(x) = Ae^{\mu x}.$$

Če sta r in kakšna od rešitev homogene DE linearno odvisni, potem ustrezni nastavek pomnožimo z x, torej $y_p = Axe^{\mu x}$.

Primer

$$y'' - y' - 2y = -e^{-x}.$$