Matematika 2

Gregor Dolinar

Fakulteta za elektrotehniko
Univerza v Ljubljani

4. junij 2014

Iskanje partikularne rešitve z metodo variacije konstante pri linearni DE

$$y''(x) + f(x)y'(x) + g(x)y(x) = r(x).$$

Naj bosta y_1 in y_2 linearno nedovisni rešitvi homogene linearne DE

$$y''(x) + f(x)y'(x) + g(x)y(x) = 0.$$

Potem je splošna rešitev homogene linearne DE enačbe

$$y_h(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x),$$

partikularno rešitev pa iščemo z nastavkom

$$y_p(x) = C_1(x)y_1(x) + C_2(x)y_2(x),$$

kjer sta y_1 in y_2 znani funkciji, C_1 in C_2 pa nista konstantni, temveč neznani funkciji.

Izračunamo

$$y_p' = C_1'(x)y_1(x) + C_1(x)y_1'(x) + C_2'(x)y_2(x) + C_2(x)y_2'(x)$$

in dodamo dodatni pogoj

$$C_1'(x)y_1(x) + C_2'(x)y_2(x) = 0.$$

Sledi

$$y_p' = C_1(x)y_1'(x) + C_2(x)y_2'(x)$$

in

$$y_p'' = C_1'(x)y_1'(x) + C_1(x)y_1''(x) + C_2'(x)y_2'(x) + C_2(x)y_2''(x).$$

To vstavimo v DE

$$y''(x) + f(x)y'(x) + g(x)y(x) = r(x)$$

in dobimo

$$\begin{aligned} C_1'(x)y_1'(x) + C_1(x)y_1''(x) + C_2'(x)y_2'(x) + C_2(x)y_2''(x) \\ + f(x)(C_1(x)y_1'(x) + C_2(x)y_2'(x)) \\ + g(x)(C_1(x)y_1(x) + C_2(x)y_2(x)) \\ = r(x), \end{aligned}$$

torej je

$$C_1'(x)y_1'(x) + C_2'(x)y_2'(x) = r(x).$$

Dobimo dve enačbi za dve neznani funkciji C_1 in C_2

$$C_1'(x)y_1(x) + C_2'(x)y_2(x) = 0$$

in

$$C_1'(x)y_1'(x) + C_2'(x)y_2'(x) = r(x).$$

Poiskati moramo rešitvi tega sistema enačb.
Zapišimo sistem v matrični obliki

$$\begin{bmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1'(x) \\ C_2'(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ r(x) \end{bmatrix}$$

Sistem enačb ima rešitev, če je determinanta sistema različna od nič.
Dobimo ravno determinanto Wronskega

$$\det \begin{bmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{bmatrix},$$

ki pa je različna od nič, saj sta y_1 in y_2 linearno neodvisni rešitvi.

Primer

$$y'' + y = \frac{1}{\cos x}$$

$$y(x) = (\log(\cos x) + K_1)\cos x + (x + K_2)\sin x$$

V nekaterih primerih si pri reševanju enačb pomagamo z nižanjem reda diferencialne enačbe.

Primer

$$xy'' - y' + \log x = 0, \quad y(1) = 0, y'(1) = 2$$

$$w = y'$$

$$xw' - w = -\log x$$

Rešitev homogene DE:

$$w_h(x) = Cx$$

Rešitev nehomogene iščemo z metodo variacije konstante:

$$w_p(x) = C(x)x$$

$$C(x) = -\int \frac{1}{x^2} \log x \, dx$$

Integral rešimo z metodo per partes

$$u = \log x, \quad dv = -\frac{1}{x^2} dx, \quad du = \frac{1}{x} dx, \quad v = \frac{1}{x}$$

$$C(x) = \log x \cdot \frac{1}{x} - \int \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{x} dx = \frac{1}{x} \log x + \frac{1}{x} + K$$

$$w(x) = \log x + 1 + Kx$$

$$y'(x) = \log x + 1 + Kx$$

$$y(x) = \int w(x)dx = \int (\log x + 1 + Kx)dx = x \log x - x + x + K\frac{1}{2}x^2 + L$$

$$y(1) = 0, y'(1) = 2$$

$$y(x) = x \log x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}$$

Definicija

Sistem diferencialnih enačb je sestavljen iz več diferencialnih enačb, v katerih nastopa več neznanih funkcij in odvodi teh funkcij.

Primer

$$\begin{aligned} y_1''(x) + y_1 y_2''(x) + y_1'(x) y_2(x) &= e^x \\ y_2''(x) + y_1'(x) y_2'(x) + y_2(x) &= e^x \cos x \end{aligned}$$

$$y_1(x) = e^x, \quad y_2(x) = \sin x$$

Obravnavali bomo poseben primer linearnega sistema diferencialnih enačb s konstantnimi koeficienti in sicer sistem n diferencialnih enačb za n neznanih funkcij $x_1, \ldots, x_n$, odvisnih od t, ki se ga da zapisati v obliki:

$$
\begin{aligned}
\dot{x}_1(t) &= a_{11}x_1(t) + a_{12}x_2(t) + \ldots + a_{1n}x_n(t) + r_1(t)\\
\dot{x}_2(t) &= a_{21}x_1(t) + a_{22}x_2(t) + \ldots + a_{2n}x_n(t) + r_2(t)\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \ldots\\
\dot{x}_n(t) &= a_{n1}x_1(t) + a_{n2}x_2(t) + \ldots + a_{nn}x_n(t) + r_n(t)
\end{aligned}
$$

Ta sistem DE enačb lahko zapišemo v matrični obliki

$$\dot{X} = AX + R,$$

pri čemer je

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}, \quad R = \begin{bmatrix} r_1(t) \\ r_2(t) \\ \vdots \\ r_n(t) \end{bmatrix}$$

Splošna rešitev sistema $\dot{X} = AX + R$ je zopet enaka

$$X = X_h + X_p,$$

kjer je X_h splošna rešitev homogenega sistema $\dot{X} = AX$ in X_p partikularna rešitev nehomogenega sistema $\dot{X} = AX + R$. Rešitev homogenega sistema $\dot{X} = AX$ iščemo z nastavkom

$$X = Ve^{\lambda t},$$

kjer je

$$V = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}, \quad \lambda \in \mathbb{C}, \quad Ve^{\lambda t} = \begin{bmatrix} v_1 e^{\lambda t} \\ v_2 e^{\lambda t} \\ \vdots \\ v_n e^{\lambda t} \end{bmatrix}$$

Vstavimo nastavek $X = Ve^{\lambda t}$ v diferencialno enačbo $\dot{X} = AX$ in dobimo

$$\lambda Ve^{\lambda t} = AVe^{\lambda t}.$$

Enačbo lahko krajšamo z $e^{\lambda t}$, torej je

$$AV = \lambda V.$$

Dobili smo, da je V lastni vektor, λ pa lastna vrednost matrike A. Rešitev homogenega sistema poiščemo tako, da izračunamo lastne vrednosti in lastne vektorje matrike A.

Če v primeru sistema dveh enačb za dve neznanki dobimo dve različni realni lastni vrednosti $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ in sta

$$V_1 = \begin{bmatrix} v_{11} \\ v_{12} \end{bmatrix}, \quad V_2 = \begin{bmatrix} v_{21} \\ v_{22} \end{bmatrix}$$

lastna vektorja, ki pripadata lastnima vrednostima λ_1 in λ_2, potem je splošna rešitev sistema

$$X = C_1 e^{\lambda_1 t} V_1 + C_2 e^{\lambda_2 t} V_2,$$

torej

$$x_1(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} v_{11} + C_2 e^{\lambda_2 t} v_{21},$$
$$x_2(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} v_{12} + C_2 e^{\lambda_2 t} v_{22}.$$

Primer

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= 2x + y \\ \dot{y}(t) &= -y\end{aligned}$$

Opomba

Če dobimo, da je kakšna izmed lastnih vrednosti večkratna, je iskanje splošne rešitve bolj zapleteno.

Primer

$$\dot{x}(t) = 2x + y$$
$$\dot{y}(t) = -x$$

$$\lambda_{1,2} = 1$$

Navedimo osnovni izrek, ki povezuje sistem diferencialnih enačb z eno diferencialno enačbo in nam v veliko primerih pomaga poiskati rešitev problema.

Izrek

Sistem n-diferencialnih enačb prvega reda za n neznanih funkcij je ekvivalenten eni diferencialni enačbi n-tega reda za eno neznano funkcijo.

Primer

Homogeni sistem

$$\dot{x}(t) = 2x + y$$
$$\dot{y}(t) = -x$$

je ekvivalenten DE drugega reda

$$\ddot{y} - 2\dot{y} + y = 0,$$

pri čemer smo upoštevali, da je

$$x = -\dot{y}, \quad \dot{x} = -\ddot{y}$$

$$y(t) = C_1 e^t + C_2 t e^t$$
$$x(t) = -C_1 e^t - C_2 (e^t + t e^t)$$

Sistem drugega reda

$$\begin{aligned}\ddot{x}_1 &= 2\dot{x}_2 + x_1 + x_2\\ \ddot{x}_2 &= \dot{x}_1 - 3\dot{x}_2 - x_1\end{aligned}$$

je ekvivalenten sistemu 4-reda

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= y_1\\ \dot{x}_2 &= y_2\\ \dot{y}_1 &= 2y_2 + x_1 + x_2\\ \dot{y}_2 &= y_1 - 3y_2 - x_1\end{aligned}$$

Opomba

Pri reševanju sistemov si lahko pomagamo tudi z Laplaceovo transformacijo, več o Laplaceovi transformaciji pri Matematiki 4.

Primer

Neomejena rast populacije P,

$$\frac{dP}{dt} = kP$$

Omejena rast populacije (logistična diferencilna enačba)

$$\frac{dP}{dt} \doteq kP, \qquad \text{če } P \text{ majhen}$$

$$\frac{dP}{dt} < 0, \qquad \text{če } P > K$$

$$\frac{dP}{dt} = kP\left(1 - \frac{P}{K}\right)$$

Primer

Električno vezje

$$RI + \frac{Q}{C} = E(t)$$

$$R\frac{dQ}{dt} + \frac{1}{C}Q = E(t)$$

Primer

Vzmet

$$F = -kx$$

$$m\ddot{x} = -kx$$

Dušeno nihanje

$$m\ddot{x} = -kx - c\dot{x}$$

Primer

Kemična reakcija

$$\dot{x}_1 = -(k_{12} + k_{14})x_1 + k_{21}x_2$$

$$\dot{x}_2 = k_{12}x_1 - (k_{21} + k_{23})x_2 + k_{32}x_3$$

$$\dot{x}_3 = k_{23}x_2 - (k_{32} + k_{35})x_3$$

$$\dot{x}_4 = k_{14}x_1$$

$$\dot{x}_5 = k_{35}x_3$$