IZPIT IZ MATEMATIKE 2

Univerzitetni študij

18. januar 2006

1. [20T] Izračunaj vse lastne vrednosti matrike

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 1 & 4 & 1 \\ -2 & -4 & -1 \end{bmatrix}.$$

Izračunaj tudi lastni vektor, ki pripada najmanjši lastni vrednosti.
Rešitev:

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda I) &= \begin{vmatrix} 3-\lambda & 2 & 2 \\ 1 & 4-\lambda & 1 \\ -2 & -4 & -1-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (3-\lambda)(4-\lambda)(-1-\lambda) - 4 - 8 + 2(1+\lambda) \\ &\quad +4(3-\lambda) + 4(4-\lambda) \\ &= -\lambda^3 + 6\lambda^2 - 11\lambda + 6 \\ &= -(\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-3) \end{aligned}$$

Zadnjo enakost dobimo s pomočjo Hornerjevega algoritma. Lastne vrednosti so torej $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$ in $\lambda_3 = 3$. Najmanjša lastna vrednost je $\lambda_1 = 1$. Izračunajmo sedaj še lastni vektor za lastno vrednost 1.

$$A - I = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ -2 & -4 & -2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

Lastni vektor, ki pripada lastni vrednosti 1, je torej $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$.

2. [20T] Določi vrednost parametra a tako, da bo sistem rešljiv. Sistem nato še reši.

$$\begin{aligned} 2x - y + z &= 1 \\ x + 2y - z &= 2 \\ x + 7y - 4z &= a \end{aligned}$$

Rešitev:
Zapišimo sistem s pomočjo matrike:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 7 & -4 & a \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & -5 & 3 & -3 \\ 0 & 5 & -3 & a-2 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & -5 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & a-5 \end{array}\right]$$

Da bo sistem rešljiv, mora biti $a-5=0$, torej $a=5$.
Sedaj pa še rešimo sistem. Ker je rang matrike enak 2, število neznank pa 3, imamo 1-parametrično družino rešitev.
Za parameter vzamemo z. Iz enačbe $-5y+3z=-3$ dobimo $y=\frac{3z+3}{5}$, iz enačbe $x+2y-z=2$ pa $x=\frac{4-z}{5}$. Torej:

$$\begin{aligned} z &= konst, \\ y &= \frac{3z+3}{5}, \\ x &= \frac{4-z}{5}. \end{aligned}$$

3. [20T] Zapiši prve 4 člene razvoja funkcije

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt[3]{7+x}}$$

v Taylorjevo vrsto okrog točke $a=1$.
Rešitev:
Vzamemo novo spremenljivko $y=x-1$, torej $x=y+1$.
Uporabimo binomsko formulo:

$$(1+x)^\alpha=\sum_{k=0}^{\infty}\binom{\alpha}{k}x^k, \quad |x|<1.$$

Funkcijo razvijemo okrog $a=0$ in razvoj se glasi ($\alpha=-\frac{1}{3}$, $x=\frac{y}{8}$):

$$\begin{aligned} f(y) &= \frac{1}{\sqrt[3]{8+y}}=(8+y)^{-\frac{1}{3}}=8^{-\frac{1}{3}}\left(1+\frac{y}{8}\right)^{-\frac{1}{3}} \\ &= \frac{1}{2}\left(\binom{-\frac{1}{3}}{0}+\binom{-\frac{1}{3}}{1}\cdot\frac{y}{8}+\binom{-\frac{1}{3}}{2}\cdot\frac{y^2}{64}+\binom{-\frac{1}{3}}{3}\cdot\frac{y^3}{512}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(1-\frac{y}{24}+\frac{y^2}{192}-\frac{7y^3}{20736}\right) \end{aligned}$$

Torej je

$$f(x)=\frac{1}{2}\left(1-\frac{x-1}{24}+\frac{(x-1)^2}{192}-\frac{7(x-1)^3}{20736}\right).$$

4. [20T] Poišči rešitev začetnega problema

$$\begin{aligned} xy'(x)+(1+x)y(x) &= e^{-x}, \\ y(-1) &= e. \end{aligned}$$

Rešitev:
Diferencialna enačba, ki jo moramo rešiti je nehomogena linearna diferencialna enačba prvega reda.

- Najprej rešimo homogeni del.

$$\begin{aligned} xy' &= -(1+x)y \\ \int\frac{dy}{y} &= -\int\frac{1+x}{x}dx \\ \ln y &= -\ln|x|-x+\ln C \\ y &= \frac{Ce^{-x}}{x} \end{aligned}$$

- Nehomogeni del rešimo s pomočjo variacije konstante.
$$\begin{aligned} y(x) &= \frac{C(x)e^{-x}}{x} \\ y'(x) &= \frac{C'(x)e^{-x}x - C(x)e^{-x}x - C(x)e^{-x}}{x^2} \end{aligned}$$
Vstavimo v enačbo in dobimo:
$$\frac{C'(x)e^{-x}x - C(x)e^{-x}x - C(x)e^{-x}}{x} + \frac{C(x)e^{-x}x + C(x)e^{-x}}{x} = e^{-x}.$$
Sledi:
$$\begin{aligned} \frac{C'(x)e^{-x}x}{x} &= e^{-x} \\ C(x) &= \int dx \\ C(x) &= x + D \end{aligned}$$
$$\Rightarrow y(x) = \frac{(x+D)e^{-x}}{x}$$

Upoštevajmo sedaj še začetni pogoj.
$$e = y(-1) = \frac{(-1+D)e}{-1} \Rightarrow D = 0$$
Rešitev začetnega problema se torej glasi:
$$y(x) = e^{-x}.$$

5. [20T] Reši diferencialno enačbo
$$y''(x) - 3y'(x) + 2y(x) = 4e^{-2x}.$$
Rešitev:
Diferencialna enačba, ki jo moramo rešiti je nehomogena linearna diferencialna enačba drugega reda s konstantnimi koeficienti.

- Rešimo najprej homogeni del:
$$y'' - 3y' + 2y = 0.$$
Uporabimo nastavek $y = e^{\lambda x}$ in dobimo karakteristični polinom $\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$. Ta polinom razstavimo in dobimo $(\lambda-1)(\lambda-2) = 0$, kar nam da dve rešitvi, in sicer $\lambda_1 = 1$ in $\lambda_2 = 2$.
Homogeni del rešitve se tako glasi:
$$y_H = Ae^x + Be^{2x}$$

- Partikularno rešitev dobimo s pomočjo nastavka, ki se glasi $y_p = Ce^{-2x}$. Odvajamo in dobimo $y_p' = -2Ce^{-2x}$ in $y_p'' = 4Ce^{-2x}$. To vstavimo v enačbo:
$$4Ce^{-2x} + 6Ce^{-2x} + 2Ce^{-2x} = 4e^{-2x}$$
$$\Rightarrow C = \frac{1}{3}$$
Dobimo partikularno rešitev:
$$y_p = \frac{1}{3}e^{-2x}.$$
$$\Rightarrow y(x) = y_H + y_p = Ae^x + Be^{2x} + \frac{1}{3}e^{-2x}$$