IZPIT IZ MATEMATIKE 2
Univerzitetni študij
14. junij 2006

1. [20T] Določi vrednost parametra a tako, da bo sistem rešljiv. Sistem nato reši.

$$\begin{aligned} 2x - y + z + u &= 1 \\ x + 2y - z + 4u &= 2 \\ x + 7y - 4z + 11u &= a \end{aligned}$$

Rešitev:
Zapišimo sistem s pomočjo matrike:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 4 & 2 \\ 1 & 7 & -4 & 11 & a \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 4 & 2 \\ 0 & -5 & 3 & -7 & -3 \\ 0 & 5 & -3 & 7 & a-2 \end{array}\right]$$

$$\sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 4 & 2 \\ 0 & -5 & 3 & -7 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a-5 \end{array}\right]$$

Da bo sistem rešljiv, mora biti $a - 5 = 0$, torej $a = 5$.
Sedaj pa še rešimo sistem. Ker je rang matrike enak 2, število neznank pa 4, imamo 2-parametrično družino rešitev.
Za parametra vzamemo z in u. Iz enačbe $-5y + 3z - 7u = -3$ dobimo $y = \frac{3z-7u+3}{5}$, iz enačbe $x + 2y - z + 4u = 2$ pa $x = \frac{4-z-6u}{5}$. Torej:

$$\begin{aligned} u &= konst, \\ z &= konst, \\ y &= \tfrac{3z-7u+3}{5}, \\ x &= \tfrac{4-z-6u}{5}. \end{aligned}$$

2. [20T] S pomočjo razvoja v Taylorjevo vrsto izračunaj limito

$$\lim_{x\to 0} \frac{x - \sin x}{x^2(1 - e^x)}.$$

Rešitev:
Uporabimo naslednje razvoje funkcij v Taylorjevo vrsto okrog točke 0:

$$\begin{aligned} e^x &= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots \\ \sin(x) &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} \pm \cdots \end{aligned}$$

Limita je torej enaka:

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0} \frac{x - \sin x}{x^2(1 - e^x)} &= \lim_{x\to 0} \frac{x - x + \frac{x^3}{3!} - \frac{x^5}{5!} \pm \cdots}{x^2 \left(1 - 1 - x - \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} - \cdots\right)} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{x^3\left(\frac{1}{6} - \frac{x^2}{120} \pm \cdots\right)}{-x^3\left(1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{6} + \cdots\right)} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{6} - \frac{x^2}{120} \pm \cdots}{-1 - \frac{x}{2} - \frac{x^2}{6} - \cdots} = -\frac{1}{6} \end{aligned}$$

3. [20T] Poišči minimalno in maksimalno vrednost funkcije $f(x,y,z) = x+y+z$ na elipsoidu $x^2+2y^2+2z^2 = 1$.
Rešitev:
Nalogo rešimo s pomočjo vezanega ekstrema.
Sestavimo novo funkcijo:

$$F(x,y,z,\lambda) = x+y+z+\lambda(x^2+2y^2+2z^2-1).$$

To funkcijo sedaj odvajamo parcialno po vseh spremenljivkah in odvode enačimo z 0, da dobimo stacionarne točke.

$$\begin{aligned} F_x &= 1+2\lambda x = 0 \\ F_y &= 1+4\lambda x = 0 \\ F_z &= 1+4\lambda x = 0 \\ F_\lambda &= x^2+2y^2+2z^2-1 = 0 \end{aligned}$$

Iz prvih treh enačb izrazimo po vrsti $x = -\frac{1}{2\lambda}$, $y = -\frac{1}{4\lambda}$ in $z = -\frac{1}{4\lambda}$ ter to vstavimo v četrto enačbo in dobimo:

$$\frac{1}{4\lambda^2} + \frac{2}{16\lambda^2} + \frac{2}{16\lambda^2} = 1.$$

Sledi: $\lambda^2 = \frac{1}{2}$ in zato je $\lambda_1 = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ in $\lambda_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}$.
Dobimo dve stacionarni točki: $T_1(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{4}, -\frac{\sqrt{2}}{4})$ in $T_2(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{4}, \frac{\sqrt{2}}{4})$. Vrednost funkcije v prvi točki je $-\sqrt{2}$, v drugi pa $\sqrt{2}$, torej je v točki T_1 minimalna, v točki T_2 pa maksimalna vrednost funkcije.

4. [20T] Poišči rešitev začetnega problema

$$\begin{aligned} xy'(x) + y(x) &= x\ln x, \\ y(1) &= 0. \end{aligned}$$

Rešitev:
Diferencialna enačba, ki jo moramo rešiti je nehomogena linearna diferencialna enačba prvega reda.

- Najprej rešimo homogeni del.

$$\begin{aligned} xy' &= -y \\ \int \frac{dy}{y} &= -\int \frac{dx}{x} \\ \ln y &= -\ln x + \ln C \\ y &= Cx^{-1} \end{aligned}$$

- Nehomogeni del rešimo s pomočjo variacije konstante.

$$\begin{aligned} y(x) &= C(x)x^{-1} \\ y'(x) &= C'(x)x^{-1} - C(x)x^{-2} \end{aligned}$$

Vstavimo v enačbo in dobimo:

$$C'(x) - C(x)x^{-1} + C(x)x^{-1} = x\ln x.$$

Sledi:

$$\begin{aligned} C(x) &= \int x \ln x dx \\ &= \frac{x^2 \ln x}{2} - \frac{1}{2}\int x dx \\ &= \frac{x^2 \ln x}{2} - \frac{x^2}{4} + D \end{aligned}$$

Integral smo rešili z integracijo per partes: $u = \ln x$, $dv = xdx$, $du = \frac{dx}{x}$ in $v = \frac{x^2}{2}$.

$$\Rightarrow y(x) = \left(\frac{x^2 \ln x}{2} - \frac{x^2}{4} + D\right) x^{-1} = \frac{x \ln x}{2} - \frac{x}{4} + Dx^{-1}.$$

Upoštevajmo sedaj še začetni pogoj ($\ln 1 = 0$).

$$0 = y(1) = \frac{\ln 1}{2} - \frac{1}{4} + D \Rightarrow D = \frac{1}{4}$$

Rešitev začetnega problema se torej glasi:

$$y(x) = \frac{x \ln x}{2} - \frac{x}{4} + \frac{1}{4}x^{-1}.$$

5. [20T] Reši sistem diferencialnih enačb

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -x + y, \\ \dot{y} &= 9x - y, \end{aligned}$$

kjer je $x = x(t)$ in $y = y(t)$.
Rešitev:
Sistem rešimo z nastavkoma: $x = Ae^{\lambda t}$ in $y = Be^{\lambda t}$. Odvajamo in dobimo: $\dot{x} = \lambda Ae^{\lambda t}$ in $\dot{y} = \lambda Be^{\lambda t}$. To vstavimo v enačbi ter po deljenju z $e^{\lambda t}$ in ureditvi enačb dobimo homogen sistem:

$$\begin{aligned} (\lambda + 1)A - B &= 0, \\ -9A + (\lambda + 1)B &= 0. \end{aligned}$$

Ta sistem ima netrivialno rešitev, ko je determinanta matrike koeficientov enaka 0.

$$\begin{vmatrix} \lambda + 1 & -1 \\ -9 & \lambda + 1 \end{vmatrix} = \lambda^2 + 2\lambda - 8 = (\lambda + 4)(\lambda - 2) = 0$$

To nam da dve rešitvi: $\lambda_1 = -4$ in $\lambda_2 = 2$.

- $\lambda_1 = -4$
  Iz enačbe dobimo, da je $B = -3A$ in zato $x_1 = A_1 e^{-4t}$ in $y_1 = -3A_1 e^{-4t}$.
- $\lambda_2 = 2$
  Iz enačbe dobimo, da je $B = 3A$ in zato $x_2 = A_2 e^{2t}$ in $y_2 = 3A_2 e^{2t}$.

Tako dobimo rešitev sistema diferencialnih enačb ($x = x_1 + x_2$, $y = y_1 + y_2$):

$$\begin{aligned} x(t) &= A_1 e^{-4t} + A_2 e^{2t}, \\ y(t) &= -3A_1 e^{-4t} + 3A_2 e^{2t}. \end{aligned}$$