IZPIT IZ MATEMATIKE 2

Univerzitetni študij

23. junij 2006

1. [20T] Izračunaj razdaljo med premicama

$$x - 1 = 2y = z + 1$$

in

$$x + 1 = 2y = z - 3.$$

Rešitev:
Smerna vektorja premic: $\vec{e_1} = (1, \frac{1}{2}, 1)$ in $\vec{e_2} = (1, \frac{1}{2}, 1)$ sta enaka, kar pomeni, da sta premici vzporedni. Razdaljo tako izračunamo kot razdaljo ene točke na eni premici do druge premice. Začetni točki na premicah sta: $T_1(1, 0, -1)$ in $T_2(-1, 0, 3)$. Označimo $\vec{r} = \overrightarrow{T_1T_2} = (-2, 0, 4)$. Razdaljo izračunamo s pomočjo formule

$$d = \frac{|\vec{e_1} \times \vec{r}|}{|\vec{e_1}|}.$$

Izračunajmo najprej vektorski produkt:

$$\vec{e_1} \times \vec{r} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & \frac{1}{2} & 1 \\ -2 & 0 & 4 \end{vmatrix} = (2, -6, 1).$$

Sledi: $|\vec{e_1} \times \vec{r}| = \sqrt{41}$ in $|\vec{e_1}| = \frac{3}{2}$. Torej je razdalja med premicama enaka:

$$d = \frac{2\sqrt{41}}{3}.$$

2. [20T] Dokaži, da tvorijo vektorji

$$x_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad x_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad x_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

bazo prostora $\mathbb{R}^3$. Razvij vektor $y = \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \\ 1 \end{bmatrix}$ po tej bazi.

Rešitev:
Najprej pokažimo, da so vektorji linearno neodvisni.

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -10 \neq 0$$

Ker je determinanta matrike, ki je sestavljena iz vektorjev x_1, x_2 in x_3 različna od 0, so ti vektorji linearno neodvisni. Ker jih je dovolj (so trije), tvorijo bazo prostora $\mathbb{R}^3$.
Vektor y želimo zapisati v obliki:

$$y = \alpha x_1 + \beta x_2 + \gamma x_3,$$

kjer iščemo koeficiente α, β in γ. To nam da sistem enačb

$$\begin{aligned}
\alpha+3\beta+2\gamma &= 3\\
3\alpha+2\beta+\gamma &= 7\\
\alpha+\beta+2\gamma &= 1
\end{aligned}$$

Ta sistem ima rešitev, ker se da vsak vektor zapisati kot linearno kombinacijo baznih vektorjev. Rešitev poiščemo z Gaussovo eliminacijo. Dobimo: $\alpha=2$, $\beta=1$ in $\gamma=-1$. Torej:

$$y=2x_1+x_2-x_3.$$

3. [20T] Funkcijo Razvij funkcijo $f(x)=\frac{x}{\sqrt{9+x}}$ v Taylorjevo vrsto okrog točke $a=0$.
Rešitev:
Uporabili bomo razvoj v binomsko vrsto okrog točke 0:

$$(1+x)^\alpha=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{\alpha}{n}x^n, \quad |x|<1.$$

Razvijemo funkcijo $f(x)$ v Taylorjevo vrsto okrog točke $a=0$.

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{x}{\sqrt{x+9}}=x(x+9)^{-\frac{1}{2}}\\
&= \tfrac{1}{3}x\left(1+\tfrac{x}{9}\right)^{-\frac{1}{2}} \quad \left(\text{binomska vrsta z } \alpha=-\tfrac{1}{2}\right)\\
&= \frac{1}{3}x\sum_{n=0}^{\infty}\binom{-\frac{1}{2}}{n}\left(\frac{x}{9}\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{3^{2n+1}}\binom{-\frac{1}{2}}{n}x^{n+1}.
\end{aligned}$$

4. [20T] Poišči lokalne ekstreme funkcije

$$f(x,y)=x^3-4x^2+2xy-y^2.$$

Rešitev:
Izračunajmo najprej prve parcialne odvode:

$$\begin{aligned}
f_x &= 3x^2-8x+2y\\
f_y &= 2x-2y
\end{aligned}$$

Stacionarne točke so tam, kjer sta oba prva parcialna odvoda enaka 0. Dobimo sistem:

$$\begin{aligned}
3x^2-8x+2y &= 0\\
2x-2y &= 0
\end{aligned}$$

Iz druge enačbe dobimo $y=x$. To vstavimo v prvo enačbo in dobimo $3x^2-6x=0$. To lahko delimo s 3 in razstavimo ter dobimo $x(x-2)=0$. Ta enačba ima dve rešitvi, in sicer $x_1=0$ in $x_2=2$. To nam da $y_1=0$ in $y_2=2$. Stacionarni točki: $T_1(0,0)$ in $T_2(2,2)$. Izračunajmo sedaj še druge parcialne odvode:

$$f_{xx}=6x-8, \quad f_{yy}=-2, \quad f_{xy}=2.$$

Torej se Hessejeva matrika funkcije f glasi:

$$Hf=\begin{bmatrix} 6x-8 & 2\\ 2 & -2\end{bmatrix}$$

Oglejmo si sedaj determinanto te matrike v obeh stacionarnih točkah.

- $$\det Hf(0,0) = \begin{vmatrix} -8 & 2 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = 12 > 0, \qquad f_{xx}(0,0) = -8 < 0$$

  $\Rightarrow$ V točki $T_1(0,0)$ imamo lokalni maksimum.

- $$\det Hf(2,2) = \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = -12 < 0$$

  $\Rightarrow$ V točki $T_2(2,2)$ imamo sedlo.

5. [20T] Poišči rešitev začetnega problema

$$\begin{aligned} xy'(x) + 3y(x) &= x^3y^2(x), \\ y(1) &= \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Rešitev:
Diferencialna enačba, ki jo moramo rešiti je Bernoullijeva diferencialna enačba. Najprej jo delimo z y^2, da jo prevedemo v pravilno obliko:

$$xy^{-2}y' + 3y^{-1} = x^3.$$

Sedaj uvedemo novo spremenljivko: $z = y^{-1}$ in $z' = -y^{-2}y'$, da dobimo:

$$-xz' + 3z = x^3,$$

kar je nehomogena linearna diferencialna enačba prvega reda.

- Najprej rešimo homogeni del.

$$\begin{aligned} xz' &= 3z \\ \int \tfrac{dz}{z} &= 3\int \tfrac{dx}{x} \\ \ln z &= 3\ln x + \ln C \\ z &= Cx^3 \end{aligned}$$

- Nehomogeni del rešimo s pomočjo variacije konstante.

$$\begin{aligned} z(x) &= C(x)x^3 \\ z'(x) &= C'(x)x^3 + 3C(x)x^2 \end{aligned}$$

  Vstavimo v enačbo in dobimo:

$$-C'(x)x^4 - 3C(x)x^3 + 3C(x)x^3 = x^3.$$

  Sledi:

$$\begin{aligned} C'(x) &= -x^{-1} \\ C(x) &= -\int \tfrac{dx}{x} = -\ln x + D \end{aligned}$$

$$\Rightarrow z(x) = -x^3\ln x + Dx^3$$

$$\Rightarrow y(x) = \frac{1}{z(x)} = \frac{1}{-x^3\ln x + Dx^3}$$

Upoštevajmo sedaj še začetni pogoj.

$$\tfrac{1}{2} = y(1) = \tfrac{1}{-\ln 1 + D}$$

Ker je $\ln 1 = 0$ je $D = 2$. Rešitev začetnega problema se torej glasi:

$$y(x) = \frac{1}{-x^3\ln x + 2x^3}.$$