IZPIT IZ MATEMATIKE 2

Univerzitetni študij

14. september 2006

1. [20T] Izračunaj lastne vrednosti in lastni vektor, ki pripada po absolutni vrednosti največji lastni vrednosti, za matriko

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Rešitev:
Lastne vrednosti dobimo kot rešitve enačbe $\det(A - \lambda I) = 0$.

$$\begin{aligned}
\det(A-\lambda I) &= \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 & 4 \\ 3 & 2-\lambda & -1 \\ 2 & 1 & -1-\lambda \end{vmatrix} \\
&= (1-\lambda)(2-\lambda)(-1-\lambda) + 2 + 12 - 8(2-\lambda) \\
&\quad +(1-\lambda) + 3(-1-\lambda) \\
&= (1-\lambda)(2-\lambda)(-1-\lambda) - 4(1-\lambda) \\
&= (1-\lambda)(\lambda^2 - \lambda - 6) \\
&= (1-\lambda)(\lambda-3)(\lambda+2)
\end{aligned}$$

Lastne vrednosti so: $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -2$ in $\lambda_3 = 3$.
Po absolutni vrednosti največja lastna vrednost je 3. Izračunajmo še pripadajoči lastni vektor:

$$A - 3I = \begin{bmatrix} -2 & -1 & 4 \\ 3 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & -4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -2 & -1 & 4 \\ 0 & -5 & 10 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -2 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Lastni vektor, ki pripada lastni vrednosti 3 je torej $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$.

2. [20T] Funkcijo

$$f(x) = \begin{cases} -x, & -\pi \le x < 0, \\ 0, & 0 \le x \le \pi, \end{cases}$$

razvij v Fourierovo vrsto na intervalu $[-\pi, \pi]$.
Rešitev:
Za razvoj funkcije v Fourierovo vrsto, je potrebno izračunati koeficiente a_0, a_n in b_n.

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{0} -x dx = -\frac{1}{2\pi}\frac{x^2}{2}\bigg|_{-\pi}^{0} = \frac{\pi}{4}$$

$$
\begin{aligned}
a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} -x\cos(nx)dx \qquad (*)\\
&= -\frac{1}{\pi}\left(\underbrace{\frac{x}{n}\sin(nx)\Big|_{-\pi}^{0}}_{0} - \frac{1}{n}\int_{-\pi}^{0}\sin(nx)dx\right)\\
&= -\frac{1}{\pi n^2}\cos(nx)\Big|_{-\pi}^{0}\\
&= \frac{(-1)^n - 1}{\pi n^2}
\end{aligned}
$$

Na mestu označenem z $(*)$ smo integrirali per partes:

$$
\begin{array}{ll}
u = x & dv = \cos(nx)dx\\
du = dx & v = \frac{1}{n}\sin(nx)
\end{array}
$$

$$
\begin{aligned}
b_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} -x\sin(nx)dx \qquad (**)\\
&= -\frac{1}{\pi}\left(-\frac{x}{n}\cos(nx)\Big|_{-\pi}^{0} + \frac{1}{n}\int_{-\pi}^{0}\cos(nx)dx\right)\\
&= -\frac{1}{\pi}\left(-\frac{\pi}{n}(-1)^n + \underbrace{\frac{1}{n^2}\sin(nx)\Big|_{-\pi}^{0}}_{0}\right)\\
&= \frac{1}{n}(-1)^n
\end{aligned}
$$

Na mestu označenem z $(**)$ smo integrirali per partes:

$$
\begin{array}{ll}
u = x & dv = \sin(nx)dx\\
du = dx & v = -\frac{1}{n}\cos(nx)
\end{array}
$$

Razvoj funkcije $f(x)$ v Fourierovo vrsto se tedaj glasi:

$$
\begin{aligned}
f(x) &= a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos(nx) + b_n\sin(nx)\right)\\
&= \frac{\pi}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(-1)^n - 1}{\pi n^2}\cos(nx) + \frac{1}{n}(-1)^n\sin(nx)\right).
\end{aligned}
$$

3. [20T] Izračunaj totalni diferencial funkcije

$$f(x,y,z) = \ln\frac{xy}{z} + \arctan\frac{1}{z} + \sqrt{x^2+y^2}.$$

Rešitev:

Za izračun totalnega diferenciala potrebujemo vse tri prve parcialne odvode funkcije $f(x,y,z)$:

$$
\begin{aligned}
f_x &= \frac{z}{xy}\cdot\frac{y}{z} + \frac{1}{2\sqrt{x^2+y^2}}\cdot 2x = \frac{1}{x} + \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\\
f_y &= \frac{z}{xy}\cdot\frac{x}{z} + \frac{1}{2\sqrt{x^2+y^2}}\cdot 2y = \frac{1}{y} + \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\\
f_z &= \frac{z}{xy}\cdot\frac{-xy}{z^2} + \frac{1}{1+\frac{1}{z^2}}\cdot\frac{-1}{z^2} = -\frac{1}{z} - \frac{1}{1+z^2}
\end{aligned}
$$

Totalni diferencial je:

$$\begin{aligned} df &= f_x dx + f_y dy + f_z dz \\ &= \left(\frac{1}{x} + \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) dx + \left(\frac{1}{y} + \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) dy + \left(-\frac{1}{z} - \frac{1}{1+z^2}\right) dz \end{aligned}$$

4. [20T] Reši diferencialno enačbo

$$xy'(x) + 2y(x) = 4x^2,$$

skupaj z začetnim pogojem $y(1) = 3$.
Rešitev:
Diferencialna enačba, ki jo moramo rešiti je nehomogena linearna diferencialna enačba prvega reda.

- Najprej rešimo homogeni del.

$$\begin{aligned} xy' &= -2y \\ \int \frac{dy}{y} &= -2\int \frac{dx}{x} \\ \ln y &= -2\ln x + \ln C \\ y &= Cx^{-2} \end{aligned}$$

- Nehomogeni del rešimo s pomočjo variacije konstante.

$$\begin{aligned} y(x) &= C(x)x^{-2} \\ y'(x) &= C'(x)x^{-2} - 2C(x)x^{-3} \end{aligned}$$

Vstavimo v enačbo in dobimo:

$$C'(x)x^{-1} - 2C(x)x^{-2} + 2C(x)x^{-2} = 4x^2.$$

Sledi:

$$C(x) = \int 4x^3 dx = x^4 + D$$

$$\Rightarrow y(x) = (x^4 + D)x^{-2} = x^2 + Dx^{-2}.$$

Upoštevajmo sedaj še začetni pogoj.

$$3 = y(1) = 1 + D \Rightarrow D = 2.$$

Rešitev začetnega problema se torej glasi:

$$y(x) = x^2 + 2x^{-2}.$$

5. [20T] Poišči rešitev začetnega problema

$$\begin{aligned} y''(x) + 4y'(x) + 3y(x) &= 4e^{-x}, \\ y(0) &= 0, \\ y'(0) &= 4. \end{aligned}$$

Rešitev:
Diferencialna enačba, ki jo moramo rešiti je nehomogena linearna diferencialna enačba drugega reda s konstantnimi koeficienti.

- Rešimo najprej homogeni del:

$$y'' + 4y' + 3y = 0.$$

Uporabimo nastavek $y = e^{\lambda x}$ in dobimo karakteristični polinom $\lambda^2 + 4\lambda + 3 = 0$. Ta polinom razstavimo in dobimo $(\lambda + 1)(\lambda + 3) = 0$, kar nam da dve rešitvi, in sicer $\lambda_1 = -1$ in $\lambda_2 = -3$.
Homogeni del rešitve se tako glasi:

$$y_H = Ae^{-x} + Be^{-3x}$$

- Partikularno rešitev dobimo s pomočjo nastavka, ki se glasi $y_p = Cxe^{-x}$, ker je -1 ničla karakterističnega polinoma. Odvajamo in dobimo $y_p' = Ce^{-x} - Cxe^{-x}$ in $y_p'' = -2Ce^{-x} + Cxe^{-x}$. To vstavimo v enačbo:

$$-2Ce^{-x} + Cxe^{-x} + 4Ce^{-x} - 4Cxe^{-x} + 3Cxe^{-x} = 4e^{-x}$$

$$\Rightarrow C = 2$$

Dobimo partikularno rešitev:

$$y_p = 2xe^{-x}.$$

Splošna rešitev se glasi:

$$y(x) = y_H + y_p = Ae^{-x} + Be^{-3x} + 2xe^{-x}.$$

Za začetne pogoje potrebujemo še odvod splošne rešitve:

$$y'(x) = -Ae^{-x} - 3Be^{-3x} + 2e^{-x} - 2xe^{-x}.$$

Vstavimo začetna pogoja in dobimo:

$$\begin{aligned} 0 = y(0) &= A + B \\ 4 = y'(0) &= -A - 3B + 2 \end{aligned}$$

Rešitev tega sistema enačb je: $A = 1$ in $B = -1$. Torej je rešitev začetnega problema:

$$y(x) = e^{-x} - e^{-3x} + 2xe^{-x}.$$