

IZPIT IZ MATEMATIKE 2

Univerzitetni študij

16. januar 2007

1. Izračunaj ploščino paralelograma, ki ga napenjata vektorja $2\vec{a} + 5\vec{b}$ in $\vec{a} - 3\vec{b}$, če je $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 3$, kot med vektorjema \vec{a} in \vec{b} pa je $\frac{\pi}{6}$.

Rešitev:

Ploščino paralelograma, ki ga napenjata vektorja $2\vec{a} + 5\vec{b}$ in $\vec{a} - 3\vec{b}$ izračunamo po formuli:

$$p_{par} = |(2\vec{a} + 5\vec{b}) \times (\vec{a} - 3\vec{b})|.$$

Najprej izračunajmo vektorski produkt:

$$(2\vec{a} + 5\vec{b}) \times (\vec{a} - 3\vec{b}) = 2\underbrace{\vec{a} \times \vec{a}}_{=0} + 5\underbrace{\vec{b} \times \vec{a}}_{=-\vec{a} \times \vec{b}} - 6\vec{a} \times \vec{b} - 15\underbrace{\vec{b} \times \vec{b}}_{=0} = -11\vec{a} \times \vec{b}$$

Ploščina paralelograma je sedaj:

$$p_{par} = |-11\vec{a} \times \vec{b}| = 11 \cdot |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin \varphi = 11 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \sin \frac{\pi}{6} = 33.$$

Upoštevali smo formulo:

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin \varphi,$$

kjer je φ kot med vektorjema \vec{a} in \vec{b} .

2. Razvij funkcijo $f(x) = \arctg x$ v Taylorjevo vrsto v okolici točke $x_0 = 0$.

Rešitev:

Funkcijo $f(x)$ najprej odvajamo:

$$g(x) = f'(x) = \frac{1}{1+x^2}.$$

Nato odvod s pomočjo geometrijske vrste razvijmo v Taylorjevo vrsto okrog $x_0 = 0$:

$$g(x) = \frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{1-(-x^2)} = \sum_{n=0}^{\infty} (-x^2)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}.$$

Ker je $f(x) = \int g(x) dx + C$, dobimo Taylorjevo vrsto za $f(x)$ tako, da vrsto za $g(x)$ členoma integriramo:

$$\begin{aligned} f(x) &= \int \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n} dx \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \int x^{2n} dx \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1} + C \end{aligned}$$

Ko vstavimo $x = 0$ v to enačbo, dobimo, da je $C = 0$. Torej:

$$\operatorname{arctg} x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}.$$

Območje konvergence te vrste je enako območju konvergence geometrijske vrste: $|x| < 1$.

3. Določi lokalne ekstreme funkcije $f(x, y) = 3x^3 + 3y^3 - 3xy$.

Rešitev:

Najprej izračunamo prva parcialna odvoda:

$$\begin{aligned} f_x &= 9x^2 - 3y, \\ f_y &= 9y^2 - 3x. \end{aligned}$$

Stacionarne točke dobimo tam, kjer sta oba odvoda enaka 0. Rešiti je potrebno sistem enačb $3x^2 = y$ in $3y^2 = x$. Če prvo enačbo vstavimo v drugo, dobimo enačbo: $27x^4 = x$. Razstavimo in dobimo: $x(3x-1)(9x^2+3x+1) = 0$. Sledi: $x_1 = 0$ in $x_2 = \frac{1}{3}$, torej $y_1 = 0$ in $y_2 = \frac{1}{3}$. Imamo dve stacionarni točki: $T_1(0, 0)$ in $T_2(\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$.

Sedaj izračunajmo druge parcialne odvode: $f_{xx} = 18x$, $f_{yy} = 18y$ in $f_{xy} = -3$. Hessejeva matrika funkcije f je tako:

$$H_f = \begin{bmatrix} 18x & -3 \\ -3 & 18y \end{bmatrix}.$$

Za vsako stacionarno točko sedaj izračunajmo vrednost determinante Hessejeve matrike v tej točki:

$$\det H_f(0, 0) = \begin{vmatrix} 0 & -3 \\ -3 & 0 \end{vmatrix} = -9 < 0$$

Torej je v točki $T_1(0, 0)$ sedlo.

$$\det H_f\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) = \begin{vmatrix} 6 & -3 \\ -3 & 6 \end{vmatrix} = 27 > 0$$

Ker je poleg tega tudi $f_{xx}(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}) = 6 > 0$, je v točki $T_2(\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ minimum.

4. Reši diferencialno enačbo

$$y'' + 3y' - 4y = 5 \sin 2x$$

skupaj z začetnimi pogoji $y(0) = 0$ in $y'(0) = 1$.

Rešitev:

Najprej rešimo homogeni del: $y'' + 3y' - 4y = 0$. Uporabimo nastavek $y = e^{\lambda x}$ ($y' = \lambda e^{\lambda x}$, $y'' = \lambda^2 e^{\lambda x}$) in dobimo enačbo: $\lambda^2 + 3\lambda - 4 = 0$. Razstavimo: $(\lambda - 1)(\lambda + 4) = 0$ in dobimo rešitvi $\lambda_1 = 1$ in $\lambda_2 = -4$. Torej je rešitev homogenega dela:

$$y_H = Ae^x + Be^{-4x}.$$

Poiščimo še partikularno rešitev, ki ima nastavek:

$$\begin{aligned} y_p &= C \sin 2x + D \cos 2x \\ y_p' &= 2C \cos 2x - 2D \sin 2x \\ y_p'' &= -4C \sin 2x - 4D \cos 2x \end{aligned}$$

Vstavimo v enačbo in dobimo:

$$\begin{aligned} -4C \sin 2x - 4D \cos 2x + 6C \cos 2x \\ -6D \sin 2x - 4C \sin 2x - 4D \cos 2x &= 5 \sin 2x \\ (-8C - 6D) \sin 2x + (6C - 8D) \cos 2x &= 5 \sin 2x \end{aligned}$$

Dobimo sistem enačb $6C - 8D = 0$, $-8C - 6D = 5$, ki ima rešitev $C = -\frac{2}{5}$ in $D = -\frac{3}{10}$. Partikularna rešitev je torej:

$$y_p = -\frac{2}{5} \sin 2x - \frac{3}{10} \cos 2x.$$

Splošna rešitev:

$$y(x) = y_p + y_H = -\frac{2}{5} \sin 2x - \frac{3}{10} \cos 2x + Ae^x + Be^{-4x}.$$

Upoštevajmo še začetne pogoje:

$$y'(x) = -\frac{4}{5} \cos 2x + \frac{3}{5} \sin 2x + Ae^x - 4Be^{-4x}$$

Dobimo sistem enačb:

$$\begin{aligned} y(0) &= -\frac{3}{10} + A + B = 0 \\ y'(0) &= -\frac{4}{5} + A - 4B = 1 \end{aligned}$$

Ta sistem ima rešitev $A = \frac{3}{5}$, $B = -\frac{3}{10}$, zato je rešitev začetnega problema:

$$y(x) = -\frac{2}{5} \sin 2x - \frac{3}{10} \cos 2x + \frac{3}{5}e^x - \frac{3}{10}e^{-4x}.$$

5. Reši sistem diferencialnih enačb

$$\begin{aligned} \dot{x} &= 3x - y, \\ \dot{y} &= -2x + 4y, \end{aligned}$$

kjer sta $x = x(t)$ in $y = y(t)$ funkciji parametra t .

Rešitev:

Sistem rešimo z nastavkoma: $x = Ae^{\lambda t}$ in $y = Be^{\lambda t}$. Odvajamo in dobimo: $\dot{x} = \lambda Ae^{\lambda t}$ in $\dot{y} = \lambda Be^{\lambda t}$. To vstavimo v enačbi ter po deljenju z $e^{\lambda t}$ in ureditvi enačb dobimo homogen sistem:

$$\begin{aligned} (\lambda - 3)A + B &= 0, \\ 2A + (\lambda - 4)B &= 0. \end{aligned}$$

Ta sistem ima netrivialno rešitev, ko je determinanta matrike koeficientov enaka 0.

$$\begin{vmatrix} \lambda - 3 & 1 \\ 2 & \lambda - 4 \end{vmatrix} = \lambda^2 + 7\lambda + 10 = (\lambda - 2)(\lambda - 5) = 0$$

To nam da dve rešitvi: $\lambda_1 = 2$ in $\lambda_2 = 5$. Za vsako poiščemo rešitev.

Za $\lambda_1 = 2$ dobimo iz enačbe $B = A$ in zato $x_1 = A_1e^{2t}$ in $y_1 = A_1e^{2t}$.

Za $\lambda_2 = 5$ dobimo iz enačbe $B = -2A$ in zato $x_2 = A_2e^{5t}$ in $y_2 = -2A_2e^{5t}$.

Rešitev sistema diferencialnih enačb je potem ($x = x_1 + x_2$, $y = y_1 + y_2$):

$$\begin{aligned} x(t) &= A_1e^{2t} + A_2e^{5t}, \\ y(t) &= A_1e^{2t} - 2A_2e^{5t}. \end{aligned}$$