REŠITVE

Naloga 1 (20 točk)

Zapišite enačbo ravnine Π, ki jo določata točki $A(0,-1,2)$ in $B(1,1,1)$ ter ravnini Π vzporeden vektor $\vec{a}=(\frac{1}{2},1,1)$.
Izračunajte še kota, pod katerima premici $p_1: 2x=y-1=z+1$ in $p_2: \frac{1-x}{2}=\frac{y}{1}=\frac{z}{\sqrt{15}}$ prebadata ravnino Π.

Določimo vektor skozi točki $A(0,-1,2)$ in $B(1,1,1)$:

$$\vec{b}=\overrightarrow{AB}=\vec{r}_B-\vec{r}_A=(1,1,1)-(0,-1,2)=(1,2,-1).$$

Nevzporedna vektorja $\vec{a}$ in $\vec{b}$ ležita na ravnini Π, njun vektorski produkt pa je normala ravnine Π:

$$\vec{n}=\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{1}{2} & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix}=(-3,\frac{3}{2},0)=\frac{3}{2}(-2,1,0).$$

Za normalo ravnine lahko vzamemo tudi $\vec{n}_1=(-2,1,0)$. Enačba ravnine Π je

$$-2x+y-d=0,$$

kjer je $d=\vec{n}_1\cdot\vec{r}_A=(-2,1,0)\cdot(0,-1,2)=-1$. Enačba ravnine Π je zato enaka $-2x+y+1=0$.

Smerni vektor premice p_1 je enak $\vec{s}_1=(\frac{1}{2},1,1)=\vec{a}$, torej ta premica leži na ravnini Π. Kot, pod katerim premica p_1 prebada ravnino Π, je zato enak 0. Smerni vektor premice p_2 je enak $\vec{s}_2=(-2,1,\sqrt{15})$. Izračunajmo najprej kot med smernim vektorjem premice p_2 in normalo ravnine Π:

$$\cos\phi=\frac{\vec{s}_2\cdot\vec{n}_1}{|\vec{s}_2|\cdot|\vec{n}_1|}=\frac{(-2,1,\sqrt{15})\cdot(-2,1,0)}{\sqrt{(-2)^2+1^2+(\sqrt{15})^2}\sqrt{(-2)^2+1^2+0^2}}=\frac{5}{\sqrt{20}\sqrt{5}}=\frac{1}{2}.$$

Sledi $\phi=\frac{\pi}{3}$, kar pomeni, da premica p_2 prebada ravnino Π pod kotom $\frac{\pi}{2}-\phi=\frac{\pi}{6}$.

Naloga 2 (20 točk)

Določite vrednosti parametrov a in b $(a>0)$, tako da bosta števili 1 in -2 lastni vrednosti matrike

$$\begin{bmatrix} a-b & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Poiščite še lastni vektor, ki pripada po absolutni vrednosti najmanjši lastni vrednosti.

Lastne vrednosti matrike so ničle karakterističnega polinoma:

$$\det(A-\lambda I) = \begin{vmatrix} (a-b)-\lambda & 0 & b \\ 0 & -\lambda & 0 \\ a & 1 & -\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= (a-b)\lambda^2 - \lambda^3 + ab\lambda = -\lambda(\lambda^2 + (b-a)\lambda - ab) = -\lambda(\lambda-a)(\lambda+b).$$

Sledi $a = 1$ *in* $b = 2$.

Poiščimo še lastni vektor matrike, ki pripada po absolutni vrednosti najmanjši lastni vrednosti 0. *Rešujemo torej homogen sistem linearnih enačb:*

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

V prvem koraku smo zamenjali drugo in tretjo vrstico, v drugem pa smo sešteli prvo in drugo vrstico. Iz prvih dveh vrstic zadnje matrike sledita naslednja pogoja za lastni podprostor matrike za lastno vrednost 0:

$$-x + 2z = 0,$$

$$y + 2z = 0.$$

Torej, $(x, y, z) = (2z, -2z, z) = z(2, -2, 1)$ *in vektor* $(2, -2, 1)$ *je lastni vektor, ki pripada lastni vrednosti* 0.

Naloga 3 (20 točk)

Razvijte funkcijo

$$f(x) = \frac{x+1}{2x+4}$$

v Taylorjevo vrsto okrog točke $a = -1$. Določite tudi območje konvergence dobljene potenčne vrste.

Predpis funkcije $f(x)$ *najprej preoblikujmo, tako da bo uporaba geometrijske vrste*

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

vodila do razvoja funkcije v Taylorjevo vrsto okrog točke $a = -1$:

$$f(x) = \frac{x+1}{2x+4} = \frac{1}{2}(x+1) \cdot \frac{1}{1+(x+1)} = \frac{1}{2}(x+1) \cdot \frac{1}{1-(-(x+1))}.$$

Sedaj sledi

$$f(x) = \frac{1}{2}(x+1) \sum_{n=0}^{\infty} (-(x+1))^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2}(-1)^n (x+1)^{n+1}$$

in $a_{n+1} = \frac{1}{2}(-1)^n$ *oziroma* $a_n = \frac{1}{2}(-1)^{n-1}$.

Območje konvergence sledi iz območja konvergence v razvoju uporabljene geometrijske vrste:

$$|-(x+1)| < 1 \implies |x+1| < 1 \implies x \in (-2, 0).$$

Naloga 4 (20 točk)

Poiščite rešitev $y(x)$ začetnega problema

$$xy^{(4)} + 3y''' = 1,$$
$$y(1) = y'(1) = y''(1) = y'''(1) = 1.$$

Najprej znižajmo red diferencialne enačbe. Ko uvedemo novo spremenljivko $u(x) = y'''(x)$, *dobimo diferencialno enačbo z ločljivimi spremenljivkami:*

$$xu' + 3u = 1.$$

Pišemo $u' = \frac{du}{dx}$ *in ločimo spremenljivke:*

$$x\frac{du}{dx} = 1 - 3u,$$
$$\frac{du}{1-3u} = \frac{dx}{x},$$
$$\frac{du}{-3(u-\frac{1}{3})} = \frac{dx}{x}.$$

Po integriranju dobimo $-\frac{1}{3}\ln(u - \frac{1}{3}) = \ln x + \ln C$ *in zato*

$$(u - \frac{1}{3})^{-\frac{1}{3}} = Cx,$$
$$u(x) = \frac{1}{3} + (Cx)^{-3} = \frac{1}{3} + \frac{D}{x^3}.$$

Izračunajmo splošno rešitev $y(x)$ *začetne diferencialne enačbe:*

$$y''(x) = \int y'''(x)dx = \int (\frac{1}{3} + \frac{D}{x^3})dx = \frac{1}{3}x - \frac{D}{2x^2} + E,$$
$$y'(x) = \int y''(x)dx = \int (\frac{1}{3}x - \frac{D}{2x^2} + E)dx = \frac{x^2}{6} + \frac{D}{2x} + Ex + F,$$
$$y(x) = \int y'(x)dx = \int (\frac{x^2}{6} + \frac{D}{2x} + Ex + F)dx = \frac{x^3}{18} + \frac{D}{2}\ln x + E\frac{x^2}{2} + Fx + G.$$

Končno poiščimo še rešitev začetnega problema:

$$\frac{1}{3} + D = 1,$$

$$\frac{1}{3} - \frac{D}{2} + E = 1,$$
$$\frac{1}{6} + \frac{D}{2} + E + F = 1,$$
$$\frac{1}{18} + \frac{E}{2} + F + G = 1.$$

Rešitev zgornjega sistema je

$$D = \frac{2}{3},\ E = 1,\ F = -\frac{1}{2},\ G = \frac{17}{18},$$

in rešitev začetnega problema se glasi

$$y(x) = \frac{x^3}{18} + \frac{1}{3}\ln x + \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}x + \frac{17}{18}.$$

Naloga 5 (20 točk)

Poiščite splošno rešitev $(x(t), y(t))$ sistema diferencialnih enačb:

$$\dot{x} = 4y,$$
$$\dot{y} = x - 3y.$$

Sistem lahko rešujemo, tako da $y(t) = \frac{1}{4}\dot{x}(t) \implies \dot{y}(t) = \frac{1}{4}\ddot{x}(t)$ *iz prve diferencialne enačbe vstavimo v drugo diferencialno enačbo. Dobimo homogeno diferencialno enačbo s konstantnimi koeficienti:*

$$\ddot{x} + 3\dot{x} - 4x = 0.$$

Z nastavkom $x(t) = e^{\lambda t}$ *pridemo do karakteristične enačbe*

$$\lambda^2 + 3\lambda - 4 = 0.$$

Rešitvi karakteristične enačbe sta $\lambda_1 = 1$ *in* $\lambda_2 = -4$, *splošna rešitev homogene dif. enačbe s konst. koef. pa se glasi*

$$x(t) = C_1 e^t + C_2 e^{-4t}.$$

Sedaj lahko izračunamo tudi $y(t)$*:*

$$y(t) = \frac{1}{4}\dot{x}(t) = \frac{1}{4}(C_1 e^t - 4C_2 e^{-4t}) = \frac{C_1}{4}e^t - C_2 e^{-4t}.$$