IZPIT IZ MATEMATIKE 2

Univerzitetni študij

21. junij 2007

1. Poišči enačbo premice, ki gre skozi težišče trikotnika ABC, in je pravokotna na ravnino trikotnika z oglišči
$$A(0,1,0), \quad B(-1,0,2) \quad \text{in} \quad C(2,2,-1).$$

   Rešitev:
   Krajevni vektor težišča trikotnika dobimo iz krajevnih vektorjev oglišč trikotnika:
$$\vec{r}_T = \tfrac{1}{3}(\vec{r}_A + \vec{r}_B + \vec{r}_C).$$
   Težišče ima koordinate: $T(\frac{1}{3}, 1, \frac{1}{3})$. Smerni vektor premice je vzporeden normali ravnine, na kateri leži trikotnik. Določimo dva vektorja:
$$\vec{a} = \vec{AB} = (-1,-1,2), \quad \vec{b} = \vec{AC} = (2,1,-1).$$
   Normala je vektorski produkt:
$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ -1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = (-1,3,1).$$
   Enačba premice:
$$\vec{r} = \left(\tfrac{1}{3}, 1, \tfrac{1}{3}\right) + t(-1,3,1), \quad \text{oziroma} \quad \tfrac{x-\frac{1}{3}}{-1} = \tfrac{y-1}{3} = \tfrac{z-\frac{1}{3}}{1}.$$

2. Izračunaj inverz matrike
$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

   Rešitev: Inverz izračunamo z Gaussovo eliminacijo.
$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 3 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right]$$
$$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -6 & -4 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -4 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -5 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 6 & 4 & -1 \end{array}\right]$$
   Sledi:
$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -4 & -3 & 1 \\ -5 & -3 & 1 \\ 6 & 4 & -1 \end{bmatrix}.$$

3. Razvij funkcijo
$$f(x) = \frac{3x-14}{x^2-11x+24}$$
   v Taylorjevo vrsto okrog točke $x_0 = 2$.

Rešitev:
Najprej uvedemo novo spremenljivko $y = x - 2$ oz. $x = y + 2$ in zapišemo novo funkcijo

$$g(y) = \frac{3(y+2) - 14}{(y+2)^2 - 11(y+2) + 24} = \frac{3y - 8}{y^2 - 7y + 6}.$$

To funkcijo razvijemo v Taylorjevo vrsto okrog točke $x_0 = 0$ z uporabo geometrijske vrste

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}, \quad |x| < 1.$$

Najprej razbijemo funkcijo na parcialne ulomke:

$$g(y) = \frac{3y - 8}{(y-1)(y-6)} = \frac{A}{y-1} + \frac{B}{y-6} = \frac{(A+B)y - 6A - B}{(y-1)(y-6)}.$$

Dobimo sistem enačb: $A + B = 3$ in $-6A - B = -8$, ki ima rešitev $A = 1$ in $B = 2$. Sledi:

$$\begin{aligned} g(y) &= \frac{1}{y-1} + \frac{2}{y-6} = -\frac{1}{1-y} - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1 - \frac{y}{6}} \\ &= -\sum_{n=0}^{\infty} y^n - \frac{1}{3} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{y}{6}\right)^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(-1 - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{6^n}\right) y^n. \end{aligned}$$

Z obratno substitucijo dobimo razvoj funkcije $f(x)$ v Taylorjevo vrsto okrog točke $x_0 = 2$:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(-1 - \tfrac{1}{3} \cdot \tfrac{1}{6^n}\right) (x-2)^n.$$

4. Reši diferencialno enačbo

$$2y''' - \frac{3}{x} y'' = x^2.$$

Rešitev:
Najprej znižamo red diferencialne enačbe z uvedbo nove spremenljivke: $u = y''$ in $u' = y'''$. Dobimo linearno enačbo prvega reda

$$2u' - \tfrac{3}{x} u = x^2.$$

(i) Homogeni del.

$$\begin{aligned} 2u' - \tfrac{3}{x} u &= 0 \\ \int \tfrac{\mathrm{d}u}{u} &= \tfrac{3}{2} \int \tfrac{\mathrm{d}x}{x} \\ \ln u &= \tfrac{3}{2} \ln x + \ln C \\ u_H &= C x^{\frac{3}{2}} \end{aligned}$$

(ii) Nehomogeni del rešimo z variacijo konstante.

$$\begin{aligned} u &= C(x) x^{\frac{3}{2}} \\ u' &= C'(x) x^{\frac{3}{2}} + \tfrac{3}{2} C(x) x^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

Vstavimo v enačbo in dobimo:

$$2C'(x)x^{\frac{3}{2}} + 3C(x)x^{\frac{1}{2}} - 3C(x)x^{\frac{1}{2}} = x^2.$$

Sledi:

$$\begin{aligned} C'(x) &= \tfrac{1}{2}x^{\frac{1}{2}} \\ C(x) &= \int \tfrac{1}{2}x^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}x = \tfrac{1}{3}x^{\frac{3}{2}} \end{aligned}$$

Partikularna rešitev:

$$u_p = \tfrac{1}{3}x^3.$$

Splošna rešitev:

$$u(x) = u_p + u_H = \tfrac{1}{3}x^3 + Cx^{\frac{3}{2}}.$$

To rešitev sedaj še dvakrat integriramo:

$$\begin{aligned} y' &= \int \left(\tfrac{1}{3}x^3 + Cx^{\frac{3}{2}}\right)\mathrm{d}x = \tfrac{1}{12}x^4 + \tfrac{2}{5}Cx^{\frac{5}{2}} + D, \\ y &= \int \left(\tfrac{1}{12}x^4 + \tfrac{2}{5}Cx^{\frac{5}{2}} + D\right)\mathrm{d}x = \tfrac{1}{60}x^5 + \tfrac{4}{35}Cx^{\frac{7}{2}} + Dx + E. \end{aligned}$$

5. Reši diferencialno enačbo

$$y'' + 2y' + 5y = 2\mathrm{e}^{3x}$$

skupaj z začetnima pogojema $y(0) = \frac{11}{10}$ in $y'(0) = \frac{33}{10}$.

Rešitev:

To je nehomogena linearna diferencialna enačba drugega reda s konstantnimi koeficienti.

(i) Homogeni del:

$$y'' + 2y' + 5y = 0.$$

Uporabimo nastavek $y = \mathrm{e}^{\lambda x}$ in dobimo karakteristični polinom $\lambda^2 + 2\lambda + 5 = 0$. Ta kvadratna enačba ima dve konjugirano kompleksni rešitvi $\lambda_1 = -1+2\mathrm{i}$ in $\lambda_2 = -1-2\mathrm{i}$.

$$\Rightarrow y_H = \mathrm{e}^{-x}(A\cos 2x + B\sin 2x)$$

(ii) Partikularno rešitev dobimo s pomočjo nastavka $y_p = C\mathrm{e}^{3x}$. Odvajamo in dobimo $y_p' = 3C\mathrm{e}^{3x}$ in $y_p'' = 9C\mathrm{e}^{3x}$. To vstavimo v enačbo:

$$9C\mathrm{e}^{3x} + 6C\mathrm{e}^{3x} + 5C\mathrm{e}^{3x} = 2\mathrm{e}^{3x} \quad \Rightarrow \quad C = \tfrac{1}{10}$$

$$\Rightarrow y_p = \tfrac{1}{10}\mathrm{e}^{3x}$$

Splošna rešitev:

$$y(x) = y_p + y_H = \tfrac{1}{10}\mathrm{e}^{3x} + \mathrm{e}^{-x}(A\cos 2x + B\sin 2x).$$

Začetni pogoji:

$$y'(x) = \tfrac{3}{10}\mathrm{e}^{3x} - \mathrm{e}^{-x}(A\cos 2x + B\sin 2x) + \mathrm{e}^{-x}(-2A\sin 2x + 2B\cos 2x)$$

$$\begin{aligned} y(0) &= A + \tfrac{1}{10} = \tfrac{11}{10} && \Rightarrow A = 1 \\ y'(0) &= -A + 2B + \tfrac{3}{10} = \tfrac{33}{10} && \Rightarrow B = 2 \end{aligned}$$

Rešitev, ki ustreza začetnim pogojem:

$$y(x) = \tfrac{1}{10}\mathrm{e}^{3x} + \mathrm{e}^{-x}(\cos 2x + 2\sin 2x).$$