REŠITVE

Naloga 1 (20 točk)

Zapišite matriko linearne transformacije, ki preslika bazo $\vec{a}_1 = (1,1,0)$, $\vec{a}_2 = (1,0,1)$ in $\vec{a}_3 = (0,1,1)$ v bazo $\vec{b}_1 = (1,2,1)$, $\vec{b}_2 = (0,0,1)$ in $\vec{b}_3 = (-1,2,0)$. Nato poiščite še vektor (x,y,z), ki ga linearna transformacija preslika v vektor $(4,4,4)$.

Matrika A linearne transformacije, ki preslika bazo a-jev v bazo b-jev, zadošča naslednji matrični enačbi:

$$A\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Matriko A zato dobimo na naslednji način:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1}.$$

Iskana inverzna matrika je enaka

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Sledi

$$A = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Sedaj poiščimo še vektor (x,y,z), ki ga matrika A preslika v vektor $(4,4,4)$. Dobimo sistem linearnih enačb, ki v matrični obliki izgleda takole:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

Rešitev sistema je vektor $(x,y,z) = (4,2,0)$

Naloga 2 (20 točk)

Za katere vrednosti parametra t imajo ravnine $x - 3z = -3$, $2x + ty - z = -2$ in $x + 2y + tz = 1$ skupne točke? Kakšen je njihov presek glede na vrednost parametra t?

Zanima nas, za katere vrednosti parametra t je sistem linearnih enačb

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & & & - & 3z & = & -3 \\ 2x & + & ty & - & z & = & -2 \\ x & + & 2y & + & tz & = & 1 \end{array}$$

rešljiv. Sistem poenostavimo do zgornjetrikotne oblike:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -3 & -3 \\ 2 & t & -1 & -2 \\ 1 & 2 & t & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -3 & -3 \\ 0 & 2 & t+3 & 4 \\ 0 & t & 5 & 4 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -3 & -3 \\ 0 & 2 & t+3 & 4 \\ 0 & 0 & 10-t^2-3t & 8-4t \end{array}\right].$$

Ravnine nimajo skupnih točk, ko sta ranga osnovne in razširjene matrike različna, tj. ko je $10-t^2-3t=0$ *in* $8-4t\neq 0$*. To velja pri* $t=-5$*.*

Ko je $t=2$*, sta ranga osnovne in razširjene matrike enaka 2 in rešitev sistema je 1-parametrična, kar pomeni, da se ravnine sekajo v skupni premici. Pri ostalih vrednostih parametra* $t\notin\{-5,2\}$ *je rešitev enolična in ravnine se sekajo v skupni točki.*

Naloga 3 (20 točk)

S pomočjo razvoja funkcije e^x v Taylorjevo vrsto razvijte funkcijo

$$f(x)=\int_0^x \frac{(e^{-t/2}-1)}{t}\,dt$$

v Taylorjevo vrsto v okolici točke $a=0$. Z uporabo prvih treh členov Taylorjeve vrste izračunajte vrednost funkcije v točki 1.

Ker je

$$1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots$$

Taylorjeva vrsta funkcije e^x *v okolici točke* 0*, je*

$$\frac{(1-\frac{t}{2}+\frac{t^2}{8}-\frac{t^3}{48}+\cdots)-1}{t}=-\frac{1}{2}+\frac{t}{8}-\frac{t^2}{48}+\cdots$$

Taylorjeva vrsta funkcije $\frac{e^{-t/2}-1}{t}$ *v okolici točke* 0*. Taylorjeva vrsta funkcije* $f(x)$ *v okolici točke* 0 *je tedaj:*

$$f(x)=\int_0^x(-\frac{1}{2}+\frac{t}{8}-\frac{t^2}{48}+\cdots)\,dt=\big[-\frac{1}{2}t+\frac{t^2}{16}-\frac{t^3}{3\cdot 48}+\cdots\big]_0^x=-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{16}-\frac{x^3}{144}+\cdots$$

Izračunajmo še približno vrednost funkcije $f(x)$ *v točki* 1*:*

$$f(1)\approx-\frac{1}{2}+\frac{1}{16}-\frac{1}{144}=-\frac{4}{9}=-0,\overline{4}.$$

Naloga 4 (20 točk)

Poiščite ekstreme funkcije

$$z(x, y) = x^2 - xy + y^2$$

na območju

$$x + y = 1.$$

Iščemo vezane ekstreme na premici $x+y=1$. Lagrangeova funkcija za iskanje kandidatov za vezane ekstreme se glasi

$$Z(x, y; \lambda) = x^2 - xy + y^2 + \lambda(x + y - 1).$$

Dobimo sistem enačb za stacionarne točke:

$$2x - y + \lambda = 0$$

$$-x + 2y + \lambda = 0$$

$$x + y - 1 = 0$$

Rešitev je ena sama: $T_2(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ in $z(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = \frac{1}{4}$.

Nalogo bi lahko rešili tudi brez vezanih ekstremov. Pogoj $y = 1-x$ vstavimo v funkcijo dveh spremenljivk $z(x, y)$ in dobimo funkcijo ene spremenljivke $u(x) = 3x^2 - 3x + 1$, ki ima en sam (nevezan) ekstrem, tj. $x = \frac{1}{2}$ oz. $u(\frac{1}{2}) = z(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = \frac{1}{4}$.

Naloga 5 (20 točk)

Poiščite tisto rešitev diferencialne enačbe

$$3y' - 4xy = -12xy^{-2},$$

ki je omejena, ko gre x čez vse meje (proti ∞).

Podana diferencialna enačba je Bernoullijeva ($\alpha = -2$). Po navodilu vpeljemo novo odvisno spremenljivko $u = y^{1-\alpha} = y^3$ in dobimo linearno dif. enačbo 1. reda:

$$u' - 4xu = -12x.$$

Splošna rešitev je vsota rešitve splošne rešitve homogene enačbe (u_h) in partikularne rešitve nehomogene enačbe (u_p).

- *Splošna rešitev homogene enačbe $u' - 4xu = 0$ je enaka $u_h = Ce^{2x^2}$.*
- *Partikularno rešitev nehomogene enačbe dobimo z variacijo konstante – za nastavek vzamemo $u = C(x)e^{2x^2}$. Ker je $u' = C'(x)e^{2x^2} + 4xCe^{2x^2}$, iz nehomogene dif. enačbe za u sledi*

  $$C' = -12xe^{-2x^2}.$$

  Torej,

  $$C = \int -12xe^{-2x^2}\,dx = 3\int e^t\,dt = 3e^t = 3e^{-2x^2},$$

  pri čemer je $t = -2x^2$ nova spremenljivka.

Dobimo rešitev

$$u = u_h + u_p = Ce^{2x^2} + 3e^{-2x^2} \cdot e^{2x^2} = Ce^{2x^2} + 3.$$

Sledi splošna rešitev Bernoullijeve enačbe:

$$y = u^{1/3} = \sqrt[3]{Ce^{2x^2} + 3}.$$

Izmed vseh rešitev zdaj poiščimo še tisto, ki je omejena, ko gre x proti ∞. Ker je

$$\lim_{x\to\infty} \sqrt[3]{Ce^{2x^2} + 3}$$

enaka $+\infty$ ali $-\infty$ za vse $C \neq 0$ (odvisno od predznaka C), edino omejeno rešitev dobimo pri $C = 0$. Iskana rešitev je $y = \sqrt[3]{3}$.