IZPIT IZ MATEMATIKE 2

Univerzitetni študij

17. september 2007

1. Določi parameter a tako, da bo premica

$$\frac{x+1}{2} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z}{a}$$

vzporedna ravnini, ki vsebuje premico

$$\frac{x}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z}{1}$$

in točko $T(4,-2,-1)$.

Rešitev: Naj ravnina Π vsebuje dano premico in dano točko, ki ne leži na premici. Začetna točka premice je $T_0(0,0,0)$, smerni vektor pa $\vec{e} = (2,1,1)$. Torej imamo dva nevzporedna vektorja v ravnini Π: $\vec{e}$ in $\vec{r} = \vec{T_0T} = (4,-2,-1)$. Izračunamo normalo ravnine:

$$\vec{n} = \vec{r} \times \vec{e} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 4 & -2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (-1,-6,8).$$

Da bo premica vzporedna z ravnino, mora biti smerni vektor $\vec{f} = (2,-1,a)$ premice pravokoten na normalo $\vec{n}$ ravnine, torej mora biti skalarni produkt $\vec{f} \cdot \vec{n} = 0$. Sledi:

$$4 + 8a = 0 \quad \Rightarrow \quad a = -\frac{1}{2}.$$

2. Določi parametra a in b tako, da imajo ravnine, podane z enačbami

$$\begin{aligned} x+y+z &= 1 \\ x-y-3z &= 2 \\ 3x+y+bz &= a \end{aligned}$$

skupno premico.

Rešitev: Tri ravnine se bodo sekale v skupni premici, ko bo imel dan sistem enačb 1-parametrično družino rešitev, to je, ko bosta ranga matrike koeficientov in razširjene matrike enaka 2.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -3 & 2 \\ 3 & 1 & b & a \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -4 & 1 \\ 0 & -2 & b-3 & a-3 \end{array}\right]$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & b+1 & a-4 \end{array}\right]$$

Ranga sta enaka 2, ko je $a = 4$ in $b = -1$.

3. Določi in klasificiraj ekstreme funkcije

$$f(x,y) = x^3 + 8y^3 - 6xy + 5.$$

Rešitev: Najprej izračunamo prva parcialna odvoda:

$$\begin{aligned} f_x &= 3x^2 - 6y, \\ f_y &= 24y^2 - 6x. \end{aligned}$$

Stacionarne točke dobimo tam, kjer sta oba odvoda enaka 0. Rešiti je potrebno sistem enačb $3x^2 - 6y = 0$ in $24y^2 - 6x = 0$. Iz druge enačbe dobimo $x = 4y^2$ in to vstavimo v prvo enačbo. Sledi: $48y^4 - 6y = 0$. Razstavimo in dobimo: $6y(2y-1)(4y^2+2y+1) = 0$. Torej: $y_1 = 0$ in $y_2 = \frac{1}{2}$, zato $x_1 = 0$ in $x_2 = 1$. Imamo dve stacionarni točki: $T_1(0,0)$ in $T_2(1, \frac{1}{2})$.
Sedaj izračunamo druge parcialne odvode: $f_{xx} = 6x$, $f_{yy} = 48y$ in $f_{xy} = -6$. Hessejeva matrika funkcije f je

$$H_f = \begin{bmatrix} 6x & -6 \\ -6 & 48y \end{bmatrix}.$$

Nato za vsako stacionarno točko izračunamo vrednost determinante Hessejeve matrike v tej točki.

$$\det H_f(0,0) = \begin{vmatrix} 0 & -6 \\ -6 & 0 \end{vmatrix} = -36 < 0$$

V točki $T_1(0,0)$ imamo sedlo.

$$\det H_f\left(1, \frac{1}{2}\right) = \begin{vmatrix} 6 & -6 \\ -6 & 24 \end{vmatrix} = 108 > 0$$

Ker je poleg tega tudi $f_{xx}(1, \frac{1}{2}) = 6 > 0$, imamo v točki $T_2(1, \frac{1}{2})$ lokalni minimum.

4. Določi ortogonalne trajektorije k družini krivulj

$$\mathrm{e}^x \sin y = C.$$

Rešitev: Najprej z odvajanjem poiščemo diferencialno enačbo, katere rešitev je ta družina.

$$\begin{aligned} \mathrm{e}^x \sin y + \mathrm{e}^x \cos y y' &= 0 \\ y' &= -\frac{\sin y}{\cos y} \end{aligned}$$

Nato zgeneriramo novo diferencialno enačbo:

$$y' = \frac{\cos y}{\sin y}.$$

Rešitve te diferencialne enačbe so ortogonalne trajektorije. S pomočjo ločitve spremenljivk izračunamo:

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= \frac{\cos y}{\sin y} \\ \int \frac{\sin y \mathrm{d}y}{\cos y} &= \int \mathrm{d}x \\ -\ln(\cos y) &= x - \ln D \\ \cos y &= D\mathrm{e}^{-x} \end{aligned}$$

Pri tem smo integral

$$\int \frac{\sin y \mathrm{d}y}{\cos y} = -\int \frac{\mathrm{d}t}{t} = -\ln t = -\ln(\cos y)$$

izračunali s pomočjo uvedbe nove spremenljivke $t = \cos y$ in $\mathrm{d}t = -\sin y \mathrm{d}y$.
Ortogonalne trajektorije so:

$$\mathrm{e}^x \cos y = D.$$

5. Reši sistem diferencialnih enačb

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= y, \quad x(0) = 3, \quad y(0) = 0, \\ \ddot{y} &= y, \quad \dot{x}(0) = -1, \quad \dot{y}(0) = 1. \end{aligned}$$

Rešitev: Najprej rešimo diferencialno enačbo $\ddot{y} - y = 0$, ki je homogena linearna diferencialna enačba drugega reda s konstantnimi koeficienti.
Karakteristični polinom je $\lambda^2 - 1 = 0$, ki ima ničle $\lambda_{1,2} = \pm 1$, zato je rešitev enačbe:

$$y = A\mathrm{e}^t + B\mathrm{e}^{-t}.$$

Odvajamo:

$$\dot{y} = A\mathrm{e}^t - B\mathrm{e}^{-t}.$$

Vstavimo začetne pogoje in dobimo sistem enačb

$$\begin{aligned} y(0) = A + B &= 0, \\ \dot{y}(0) = A - B &= 1, \end{aligned}$$

ki ima rešitev $A = \frac{1}{2}$ in $B = -\frac{1}{2}$. Torej:

$$y(t) = \frac{1}{2}\mathrm{e}^t - \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-t}.$$

Sedaj pa rešimo še diferencialno enačbo $\ddot{x} = \frac{1}{2}\mathrm{e}^t - \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-t}$ tako, da dvakrat integriramo.

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \int \left(\frac{1}{2}\mathrm{e}^t - \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-t}\right) \mathrm{d}t = \frac{1}{2}\mathrm{e}^t + \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-t} + C \\ x &= \int \left(\frac{1}{2}\mathrm{e}^t + \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-t} + C\right) \mathrm{d}t = \frac{1}{2}\mathrm{e}^t - \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-t} + Ct + D \end{aligned}$$

Vstavimo začetne pogoje in dobimo sistem enačb

$$\begin{aligned} x(0) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + D &= 3, \\ \dot{x}(0) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + C &= -1, \end{aligned}$$

ki ima rešitev $C = -2$ in $D = 3$. Torej:

$$x(t) = \frac{1}{2}\mathrm{e}^t - \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-t} - 2t + 3.$$