IZPIT IZ MATEMATIKE 2

Univerzitetni študij

15. januar 2008

1. Ali točke $A(2,1,-3)$, $B(1,-1,2)$, $C(3,0,-7)$ in $D(1,-4,3)$ ležijo v isti ravnini?

   Rešitev: Najprej zapišemo tri vektorje:

$$\begin{aligned} \vec{a} &= \vec{AB} = (-1,-2,5), \\ \vec{b} &= \vec{AC} = (1,-1,-4), \\ \vec{c} &= \vec{AD} = (-1,-5,6). \end{aligned}$$

   Točke A, B, C in D ležijo v isti ravnini, ko so vektorji $\vec{a}$, $\vec{b}$ in $\vec{c}$ komplanarni, torej ko je mešani produkt $(\vec{a},\vec{b},\vec{c}) = 0$.

$$(\vec{a},\vec{b},\vec{c}) = \begin{vmatrix} -1 & -2 & 5 \\ 1 & -1 & -4 \\ -1 & -5 & 6 \end{vmatrix} = 6 - 8 - 25 - 5 + 20 + 12 = 0$$

   Točke ležijo v isti ravnini.

2. Določite parameter a tako, da bo sistem

$$\begin{aligned} 2x - y + z + w &= 1 \\ x + 2y - z + 4w &= 2 \\ x + 7y - 4z + 11w &= a \end{aligned}$$

   rešljiv. Za to vrednost parametra a sistem tudi rešite.

   Rešitev: Sestavimo razširjeno matriko koeficientov:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 4 & 2 \\ 1 & 7 & -4 & 11 & a \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 4 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 7 & -4 & 11 & a \end{array}\right]$$

$$\sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 4 & 2 \\ 0 & -5 & 3 & -7 & -3 \\ 0 & 5 & -3 & 7 & a-2 \end{array}\right]$$

$$\sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 4 & 2 \\ 0 & -5 & 3 & -7 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a-5 \end{array}\right]$$

   Sistem je rešljiv, ko sta ranga razširjene in osnovne matrike koeficientov enaka, torej ko je $a - 5 = 0$, oz. ko je $a = 5$.
   V tem primeru dobimo 2-parametrično družino rešitev:

$$\begin{aligned} x &= -\frac{1}{5}z - \frac{6}{5}w + \frac{4}{5} \\ y &= \frac{3}{5}z - \frac{7}{5}w + \frac{3}{5} \\ z &= \text{polj.} \\ w &= \text{polj.} \end{aligned}$$

3. Poiščite minimum funkcije
$$f(x,y) = 3x^2 - 2xy + 3y^2$$
pri pogoju $x^3 + y^3 = 2$.

Rešitev: Sestavimo razširjeno funkcijo
$$F(x,y,\lambda) = 3x^2 - 2xy + 3y^2 + \lambda(x^3 + y^3 - 2),$$
ki jo nato odvajamo po vseh treh spremenljivkah.
$$\begin{aligned} F_x &= 6x - 2y + 3\lambda x^2 = 0 \\ F_y &= -2x + 6y + 3\lambda y^2 = 0 \\ F_\lambda &= x^3 + y^3 - 2 = 0 \end{aligned}$$
Stacionarno točko dobimo, ko so vsi odvodi enaki 0. Če prvo enačbo množimo z y^2, drugo z $-x^2$ ter ju seštejemo, dobimo
$$2(x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3) = 0,$$
oziroma $2(x-y)^3 = 0$, kar nam da $x = y$. Ko to vstavimo v tretjo enačbo, dobimo $2x^3 = 2$ in zato $x = 1$ in $y = 1$.
Torej imamo v točki $T(1,1)$ minimum ($f(1,1) = 4$).

4. Poiščite rešitev diferencialne enačbe
$$(x^2 - 1)y' + 2xy - 3x^2 + 1 = 0,$$
skupaj z začetnim pogojem $y(2) = 3$.

Rešitev: To je linearna diferencialna enačba. Najprej rešimo homogeni del z ločitvijo spremenljivk:
$$\begin{aligned} (x^2-1)y' + 2xy &= 0 \\ y' &= -\frac{2xy}{x^2-1} \\ \int \frac{\mathrm{d}y}{y} &= -\int \frac{2x\mathrm{d}x}{x^2-1} \\ \ln y &= -\ln(x^2-1) + \ln C \\ y_H &= \frac{C}{x^2-1} \end{aligned}$$
Pri tem smo integral
$$\int \frac{2x\mathrm{d}x}{x^2-1} = \int \frac{\mathrm{d}t}{t} = \ln t = \ln(x^2-1)$$
izračunali s pomočjo uvedbe nove spremenljivke $t = x^2 - 1$ in $\mathrm{d}t = 2x\mathrm{d}x$.
Partikularno rešitev poiščemo z variacijo konstante:
$$\begin{aligned} y(x) &= \frac{C(x)}{x^2-1} \\ y'(x) &= \frac{C'(x)(x^2-1) - 2xC(x)}{(x^2-1)^2} \end{aligned}$$
Vstavimo v enačbo:
$$C'(x) - \frac{2xC(x)}{x^2-1} + \frac{2xC(x)}{x^2-1} = 3x^2 - 1.$$

Dobimo:

$$C(x) = \int (3x^2 - 1)\mathrm{d}x = x^3 - x + D.$$

Torej je splošna rešitev:

$$y(x) = x + \frac{D}{x^2 - 1}.$$

Sedaj vstavimo še začetni pogoj: $y(2) = 2 + \frac{D}{3} = 3$, od koder sledi $D = 3$.
Iskana rešitev je torej:

$$y(x) = x + \frac{3}{x^2 - 1}.$$

5. Rešite diferencialno enačbo

$$y'' + 2y' + 5y = \mathrm{e}^{3x}.$$

Rešitev: To je linearna diferencialna enačba s konstantnimi koeficienti. Homogeni del rešimo z nastavkom $y = \mathrm{e}^{\lambda x}$. Dobimo karakteristično enačbo $\lambda^2 + 2\lambda + 5 = 0$, ki ima dve kompleksni rešitvi:

$$\lambda_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 20}}{2} = -1 \pm 2\mathrm{i}.$$

Zato je homogeni del rešitve enak:

$$y_H = \mathrm{e}^{-x}(A \cos 2x + B \sin 2x).$$

Partikularni del poiščemo z nastavkom $y_p = C\mathrm{e}^{3x}$. Nastavek s pripadajočimi odvodi ($y_p' = 3C\mathrm{e}^{3x}$, $y_p'' = 9C\mathrm{e}^{3x}$) vstavimo v enačbo in dobimo:

$$9C\mathrm{e}^{3x} + 6C\mathrm{e}^{3x} + 5C\mathrm{e}^{3x} = \mathrm{e}^{3x}.$$

Sledi: $20C = 1$, oz. $C = \frac{1}{20}$ in zato je partikularna rešitev enaka:

$$y_p = \frac{1}{20}\mathrm{e}^{3x}.$$

Splošna rešitev diferencialne enačbe se tedaj glasi:

$$y(x) = \frac{1}{20}\mathrm{e}^{3x} + \mathrm{e}^{-x}(A \cos 2x + B \sin 2x).$$