IZPIT IZ MATEMATIKE 2

Univerzitetni študij

25. avgust 2008

1. Izračunaj determinanto

$$\begin{vmatrix} -2 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & 2 & 0 & -1 \end{vmatrix}.$$

Rešitev:
Velikost determinante postopoma zmanjšujemo tako, da 'pridelujemo' ničle in razvijamo determinanto po vrstici ali stolpcu.

$$\begin{vmatrix} -2 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & 2 & 0 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & -1 & -1 \\ 3 & 0 & 2 & -3 & 0 \\ 4 & 0 & 1 & -3 & -2 \\ -2 & 0 & 2 & 0 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$-\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 & -1 \\ 3 & 2 & -3 & 0 \\ 4 & 1 & -3 & -2 \\ -2 & 2 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 & -1 \\ 3 & 2 & -3 & 0 \\ 2 & -5 & -1 & 0 \\ -3 & -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$-\begin{vmatrix} 3 & 2 & -3 \\ 2 & -5 & -1 \\ -3 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} -6 & -1 & -3 \\ -1 & -6 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$-\begin{vmatrix} -6 & -1 \\ -1 & -6 \end{vmatrix} = -35$$

2. Določi parameter a tako, da bo imel sistem rešitev $z = 1$.

$$\begin{aligned} ax + y + 3z &= 3 \\ 2ax + 3y + 4z &= 0 \\ x - 2y - 6z &= 4 \end{aligned}$$

Rešitev:
Sistem zapišemo v matrični obliki in izračunamo rang.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -6 & 4 \\ a & 1 & 3 & 3 \\ 2a & 3 & 4 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -6 & 4 \\ 0 & 1+2a & 3+6a & 3-4a \\ 0 & 3+4a & 4+12a & -8a \end{array}\right]$$
$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -6 & 4 \\ 0 & 1 & -2 & -6 \\ 0 & 1+2a & 3+6a & 3-4a \end{array}\right]$$
$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -6 & 4 \\ 0 & 1 & -2 & -6 \\ 0 & 0 & 5+10a & 9+8a \end{array}\right]$$

Da bo $z = 1$ rešitev, mora biti $5 + 10a = 9 + 8a$, torej $a = 2$.

3. S pomočjo totalnega diferenciala izračunaj približno vrednost izraza

$$\sqrt{4.05^2 + 2.93^2}.$$

Rešitev:
Izberemo funkcijo
$$f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$$
ter vrednosti $a = 4$, $b = 3$, $h = 0.05$ in $k = -0.07$. Funkcijo parcialno odvajamo po x in y:

$$f_x(x, y) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \qquad f_y(x, y) = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Približno vrednost določimo po formuli

$$f(a + h, b + k) \approx f(a, b) + f_x(a, b)h + f_y(a, b)k$$

Torej:
$$\sqrt{4.05^2 + 2.93^2} \approx 5 + \frac{4}{5} \cdot \frac{5}{100} - \frac{3}{5} \cdot \frac{7}{100} = 4.998$$

4. Reši diferencialno enačbo

$$xy' - \frac{y}{x + 1} = x.$$

Poišči tisto rešitev, ki zadošča pogoju $y(1) = 0$.

Rešitev:
To je linearna diferencialna enačba. Najprej rešimo homogeni del z ločitvijo spremenljivk:

$$\begin{aligned}
xy' - \frac{y}{x+1} &= 0 \\
x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= \frac{y}{x+1} \\
\int \frac{\mathrm{d}y}{y} &= \int \frac{\mathrm{d}x}{x(x+1)} = \int \frac{\mathrm{d}x}{x} - \int \frac{\mathrm{d}x}{x+1} \\
\ln y &= \ln x - \ln(x+1) + \ln C \\
y_H &= \frac{Cx}{x+1}
\end{aligned}$$

Upoštevali smo razbitje na parcialne ulomke $\frac{1}{x(x+1)} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}$.
Partikularno rešitev izračunamo z variacijo konstante:

$$\begin{aligned}
y &= \frac{C(x)x}{x+1} \\
y' &= \frac{C'(x)x(x+1) - C(x)}{(x+1)^2}
\end{aligned}$$

Vstavimo v enačbo:

$$\frac{C'(x)x^2(x+1) - C(x) + C(x)}{(x+1)^2} = x$$

Dobimo $C'(x) = 1 + \frac{1}{x}$ in zato $C(x) = x + \ln x$. To nam da partikularno rešitev

$$y_p = \frac{x^2 + x\ln x}{x+1}$$

Splošna rešitev:

$$y(x) = y_p + y_H = \frac{x^2 + x\ln x + Cx}{x+1}$$

Sedaj vstavimo še začetni pogoj: $y(1) = \frac{1+C}{2} = 0$, od koder sledi $C = -1$.
Iskana rešitev je torej:

$$y(x) = \frac{x^2 + x\ln x - x}{x+1}$$

5. Reši diferencialno enačbo

$$y'' - 2y' + y = xe^x.$$

Rešitev:

To je linearna diferencialna enačba drugega reda s konstantnimi koeficienti. Najprej homogeni del. Z uporabo nastavka $y = e^{\lambda x}$, dobimo karakteristično enačbo

$$\lambda^2 - 2\lambda + 1 = (\lambda - 1)^2 = 0,$$

ki ima rešitev $\lambda_{1,2} = 1$. Homogeni del rešitve se zaradi dvojne ničle glasi:

$$y_H = C_1 e^x + C_2 x e^x$$

Partikularno rešitev poiščemo z nastavkom $y_p = (Ax + B)x^2 e^x$, ker je 1 ničla druge stopnje in je funkcija na desni (xe^x) produkt polinoma prve stopnje in eksponentne funkcije. Odvajamo:

$$\begin{aligned}
y_p &= (Ax + B)x^2 e^x \\
y_p' &= Ax^2 + 2(Ax + B)xe^x + (Ax + B)x^2 e^x \\
y_p'' &= 4Axe^x + 2Ax^2 e^x + 2(Ax + B)e^x + 4(Ax + B)xe^x + (Ax + B)x^2 e^x
\end{aligned}$$

Vstavimo v enačbo in dobimo:

$$6Axe^x + 2Be^x = xe^x,$$

kar nam da $A = \frac{1}{6}$ in $B = 0$. Partikularna rešitev je:

$$y_p = \frac{1}{6} x^3 e^x$$

Splošna rešitev:

$$y(x) = y_p + y_H = \frac{1}{6} x^3 e^x + C_1 e^x + C_2 x e^x$$