REŠITVE

Naloga 1 (20 točk)

Transformacija $\mathcal{T}$ slika 3-razsežne realne vektorje v 2-razsežne realne vektorje. Vektor $\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ preslika v $\mathcal{T}(\vec{x}) = \begin{bmatrix} 2x_1 \\ -x_2 \end{bmatrix}$.

a.) Preveri, da je $\mathcal{T}$ linearna preslikava.

b.) Zapiši matriko linearne preslikave $\mathcal{T}$ v standardni bazi.

c.) Kateri vektorji se s $\mathcal{T}$ preslikajo v vektor $\begin{bmatrix} 4 \\ -3 \end{bmatrix}$?

a.) *Najprej preverimo, da je $\mathcal{T}$ linearna preslikava. Pokazati je torej treba, da za poljubna 3-razsežna vektorja $\vec{x}$ in $\vec{y}$ velja*

$$\mathcal{T}(\alpha\vec{x} + \beta\vec{y}) = \alpha\mathcal{T}(\vec{x}) + \beta\mathcal{T}(\vec{y}).$$

Računajmo:

$$\begin{aligned}
\mathcal{T}(\alpha\vec{x} + \beta\vec{y}) &= \mathcal{T}(\alpha \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}) = \mathcal{T}(\begin{bmatrix} \alpha x_1 + \beta y_1 \\ \alpha x_2 + \beta y_2 \\ \alpha x_3 + \beta y_3 \end{bmatrix}) \\
&= \begin{bmatrix} 2(\alpha x_1 + \beta y_1) \\ -(\alpha x_2 + \beta y_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\alpha x_1 \\ -\alpha x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2\beta y_1 \\ -\beta y_2 \end{bmatrix} \\
&= \alpha \begin{bmatrix} 2x_1 \\ -x_2 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 2y_1 \\ -y_2 \end{bmatrix} = \alpha\mathcal{T}(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}) + \beta\mathcal{T}(\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}) \\
&= \alpha\mathcal{T}(\vec{x}) + \beta\mathcal{T}(\vec{y}).
\end{aligned}$$

Torej res, $\mathcal{T}$ je linearna preslikava.

b.) *Zapiši zdaj matriko preslikave $\mathcal{T}$ v standardni bazi. Ker velja*

$$\mathcal{T}(\vec{i}) = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \ \mathcal{T}(\vec{j}) = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \ \mathcal{T}(\vec{k}) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

je matrika linearne preslikave enaka

$$T = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Slike standardnih baznih vektorjev smo zložili v stolpce matrike.

c.) Zdaj poglejmo še, kateri vektorji se s $\mathcal{T}$ preslikajo v vektor $\begin{bmatrix} 4 \\ -3 \end{bmatrix}$. To se da ugotoviti neposredno iz predpisa linearne transformacije. Za vsa realna števila x_3 namreč velja

$$\mathcal{T}(\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ x_3 \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} 4 \\ -3 \end{bmatrix}.$$

Rezultat: $\{\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ x_3 \end{bmatrix}; x_3$ *poljubno realno število*$\}$.

Naloga 2 (20 točk)

Dana je potenčna vrsta

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{(-4)^n}.$$

a.) Izračunaj vsoto vrste v $x = 1$.

b.) Izračunaj konvergenčni polmer vrste.

c.) Ali vrsta konvergira v $x = -4$?

a.) Najprej izračunajmo vsoto vrste v $x = 1$. Velja:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1^{n+1}}{(-4)^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(-4)^n} = \sum_{n=0}^{\infty} (-\frac{1}{4})^n = \frac{1}{1-(-\frac{1}{4})} = \frac{1}{\frac{5}{4}} = \frac{4}{5}.$$

Dobljena vrsta je geometrijska in konvergira, saj je $|q| = |-\frac{1}{4}| < 1$.

b.) Izračunajmo konvergenčni polmer vrste:

$$R = \frac{1}{\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}} = \frac{1}{\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|\frac{1}{(-4)^{n-1}}|}} = \frac{1}{\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{4^{n-1}}}} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{4^{n-1}}$$
$$= \lim_{n\to\infty} 4^{\frac{n-1}{n}} = 4.$$

Vrsta torej konvergira absolutno in enakomerno vsaj na $(-4, 4)$.

c.) Preverimo še, ali vrsta konvergira tudi v krajišču $x = -4$. Namesto x vstavimo -4 in dobimo številsko vrsto:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-4)^{n+1}}{(-4)^n} = \sum_{n=0}^{\infty} (-4) = -\infty.$$

Ta vrsta torej divergira, saj vsota ni končno število.

Naloga 3 (20 točk)

Dana je funkcija treh spremenljivk:

$$w(x, y, z) = \sin(xy) + \frac{x^2}{y^2 + z^2}.$$

a.) Določi definicijsko območje funkcije $w(x, y, z)$.

b.) Izračunaj $w_{xx}(1, 0, \sqrt{2}) + w_{zz}(1, 1, 0)$.

a.) Najprej določimo definicijsko območje funkcije $w(x, y, z)$. Vidimo, da je funkcijski predpis definiran za vse trojice (x, y, z), za katere je $y^2 + z^2 \neq 0$. Drugih omejitev (razen neničelnega imenovalca) ni. Torej, definicijsko območje

$$D_w = \{(x, y, z); y^2 + z^2 \neq 0\} = \{(x, y, z); y \neq 0 \text{ ali } z \neq 0\}$$

je množica vseh realnih vektorjev, ki niso oblike $(x, 0, 0)$.

b.) Izračunajmo še $w_{xx}(1, 0, \sqrt{2}) + w_{zz}(1, 1, 0)$. Gremo po vrsti:

$$\begin{aligned}
w_x &= \cos(xy) \cdot y + \frac{2x}{y^2 + z^2}, \\
w_{xx} &= -\sin(xy) \cdot y^2 + \frac{2}{y^2 + z^2}, \\
w_z &= -\frac{2zx^2}{(y^2 + z^2)^2}, \\
w_{zz} &= \frac{-2x^2(y^2 + z^2)^2 + 2zx^2 \cdot 2(y^2 + z^2) \cdot 2z}{(y^2 + z^2)^4}.
\end{aligned}$$

Sedaj sledi

$$w_{xx}(1, 0, \sqrt{2}) + w_{zz}(1, 1, 0) = \frac{2}{0 + 2} + \frac{-2}{1} = -1.$$

Naloga 4 (20 točk)

Poišči tisto rešitev diferencialne enačbe

$$y'''(x) - y''(x) - y'(x) + y(x) = 2x^2,$$

ki zadošča pogojem $y(0) = 5$, $y'(0) = 12$ in $y''(0) = 2$.

Dana diferencialna enačba je linearna s konstantnimi koeficienti. Splošna rešitev je sestavljena iz rešitve homogenega dela (y_h) in partikularne rešitve (y_p):

$$y = y_h + y_p.$$

a.) Homogeni del (računamo y_h):

$$y''' - y'' - y' + 1 = 0.$$

Vzamemo nastavek $y_h = e^{\lambda}$ in dobimo karakteristično enačbo:

$$\begin{aligned} \lambda^3 - \lambda^2 - \lambda + 1 &= 0, \\ \lambda^2(\lambda - 1) - (\lambda - 1) &= 0, \\ (\lambda - 1)(\lambda^2 - 1) &= 0, \\ (\lambda - 1)^2(\lambda + 1) &= 0, \end{aligned}$$

katere rešitve so:

$$\begin{aligned} \lambda_{1,2} &= 1, \\ \lambda_3 &= -1. \end{aligned}$$

Sledi rešitev homogenega dela:

$$y_h = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 x e^{\lambda_2 x} + C_3 e^{\lambda_3 x} = C_1 e^x + C_2 x e^x + C_3 e^{-x}.$$

b.) Nehomogeni del (računamo y_p):

$$y''' - y'' - y' + y = 2x^2.$$

Nastavek za partikularno rešitev je polinom 2. stopnje:

$$y_p = Ax^2 + Bx + C.$$

Nastavek 3-krat odvajamo,

$$\begin{aligned} y &= Ax^2 + Bx + C, \\ y' &= 2Ax + B, \\ y'' &= 2A, \\ y''' &= 0, \end{aligned}$$

in vstavimo v diferencialno enačbo:

$$0 - 2A - (2Ax + B) + (Ax^2 + Bx + C) = 2x^2.$$

Sledi sistem enačb (izenačimo konstanti ter koeficienta pred x in x^2):

$$\begin{aligned} -2A - B + C &= 0, \\ -2A + B &= 0, \\ A &= 2. \end{aligned}$$

Rešitev sistema je $A = 2$, $B = 4$ in $C = 8$. Sledi partikularna rešitev:

$$y_p = 2x^2 + 4x + 8.$$

Splošna rešitev diferencialne enačbe je zato

$$y = y_h + y_p = C_1 e^x + C_2 x e^x + C_3 e^{-x} + 2x^2 + 4x + 8.$$

Poiščimo še tisto rešitev, ki zadošča danim pogojem:

$$\begin{aligned} y(0) = 5: &\quad C_1 + C_3 + 8 = 5, \\ y'(0) = 12: &\quad C_1 + C_2 - C_3 + 4 = 12, \\ y''(0) = 2: &\quad C_1 + 2C_2 + C_3 + 4 = 2. \end{aligned}$$

Rešitev sistema je $C_1 = \frac{9}{4}$, $C_2 = \frac{1}{2}$ *in* $C_3 = -\frac{21}{4}$, *zato sledi*

$$y = \frac{9}{4}e^x + \frac{1}{2}xe^x - \frac{21}{4}e^{-x} + 2x^2 + 4x + 8.$$

Naloga 5 (20 točk)

Določi tip diferencialne enačbe in poišči njeno splošno rešitev $y(x)$:

$$2xy' = y \ln y + y'.$$

Če diferencialno enačbo uredimo,

$$(2x-1)y' = y \ln y \quad oz. \quad y' = \frac{y \ln y}{2x-1},$$

vidimo, da gre za diferencialno enačbo z ločljivima spremenljivkama. Sedaj vstavimo $y' = \frac{dy}{dx}$, *ločimo spremenljivki in integriramo:*

$$\begin{aligned} (2x-1)\frac{dy}{dx} &= y \ln y, \\ (2x-1)dy &= y \ln y \, dx, \\ \frac{dy}{y \ln y} &= \frac{dx}{2x-1}, \\ \int \frac{dy}{y \ln y} &= \int \frac{dx}{2x-1}. \end{aligned}$$

Pod levim integralom uvedemo novo spremenljivko

$$t = \ln y \;\Rightarrow\; dt = \frac{dy}{y},$$

pod desnim pa

$$u = 2x - 1 \;\Rightarrow\; du = 2dx.$$

Dobimo splošno rešitev diferencialne enačbe:

$$
\begin{aligned}
\int \frac{dt}{t} &= \int \frac{1}{2} \cdot \frac{du}{u}, \\
\ln t &= \frac{1}{2} \cdot \ln u + \ln C, \\
\ln t &= \ln (Cu^{\frac{1}{2}}), \\
t &= Cu^{\frac{1}{2}}, \\
\ln y &= C(2x-1)^{\frac{1}{2}}, \\
y &= e^{C(2x-1)^{\frac{1}{2}}}.
\end{aligned}
$$