IZPIT IZ MATEMATIKE II

Univerzitetni študij

26. junij 2009

1. Obravnavaj sistem

$$\begin{aligned} ax + 2y + 3z &= 2 \\ x - y - 2z &= 1 \\ 2x + 3y + z &= 7 \end{aligned}$$

glede na parameter a. V primeru, da ima sistem rešitev, ga reši.

Rešitev:

Zapišemo razširjeno matriko, ki jo z operacijami, ki ohranjajo rang predelujemo toliko časa, da dobimo ničle pod diagonalo.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 7 \\ a & 2 & 3 & 2 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 5 & 5 & 5 \\ 0 & 2+a & 3+2a & 2-a \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1+a & -2a \end{array}\right]$$

Obravnavamo primere:

- $a = -1$: sistem nima rešitve
- $a \neq -1$: sistem ima natanko eno rešitev

$$x = \frac{2}{a+1}, \quad y = \frac{3a+1}{a+1}, \quad z = -\frac{2a}{a+1}$$

2. Izračunaj lastne vrednosti matrike

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -\mathrm{i} & 0 \\ \mathrm{i} & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Izračunaj še lastni vektor, ki pripada najmanjši lastni vrednosti.

Rešitev:

Lastne vrednosti matrike A so rešitve enačbe $\det(A-\lambda I)=0$.

$$\begin{aligned}\det(A-\lambda I) &= \begin{vmatrix} 2 & -\mathrm{i} & 0 \\ \mathrm{i} & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = (2-\lambda)^2(3-\lambda)-(3-\lambda) \\ &= (3-\lambda)(\lambda^2-4\lambda+3) = -(\lambda-3)^2(\lambda-1)=0\end{aligned}$$

Lastne vrednoste matrike A so $\lambda_1 = 1$ in $\lambda_{2,3} = 3$. Najmanjša je prva lastna vrednost. Lastni vektor ($\lambda_1 = 1$).

$$A - I = \begin{bmatrix} 1 & -\mathrm{i} & 0 \\ \mathrm{i} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -\mathrm{i} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Lastni vektor je $x_1 = \begin{bmatrix} \mathrm{i} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$.

3. Z razvojem v Taylorjevo vrsto izračunaj limito

$$\lim_{x\to 0} \frac{3\sin(x)-\sin(3x)}{x^2\sin(x)}.$$

Rešitev:

Funkcijo sinus razvijemo v Taylorjevo vrsto:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0} \frac{3\sin(x)-\sin(3x)}{x^2\sin(x)} &= \lim_{x\to 0} \frac{3(x-x^3/6\pm\cdots)-(3x-27x^3/6\pm\cdots)}{x^2(x-x^3/6\pm\cdots)} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{x^3(4-2x^2\pm\cdots)}{x^3(1-x^2/6\pm\cdots)} \\ &= 4\end{aligned}$$

4. Ali je dana diferencialna enačba eksaktna? Če je, jo reši.

$$(2xy+\mathrm{e}^y)\,\mathrm{d}x + \left(x^2+x\mathrm{e}^y\right)\mathrm{d}y = 0$$

Rešitev:

Diferencialna enačba je eksaktna, če je $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$.

$$\begin{aligned}P(x,y) &= 2xy+\mathrm{e}^y \\ Q(x,y) &= x^2+x\mathrm{e}^y\end{aligned}$$

Ker je $\frac{\partial P}{\partial y} = 2x + \mathrm{e}^y$ in $\frac{\partial Q}{\partial x} = 2x + \mathrm{e}^y$, je ta pogoj izpolnjen.
Da dobimo rešitev $z = z(x,y) = 0$, najprej uporabimo enačbo $z_x = P(x,y)$:

$$z = \int P(x,y)\mathrm{d}x = \int (2xy + \mathrm{e}^y)\,\mathrm{d}x = x^2y + x\mathrm{e}^y + C(y)$$

Sedaj uporabimo še enakost $z_y = Q(x,y)$ in dobimo:

$$\begin{aligned} x^2 + x\mathrm{e}^y + C'(y) &= x^2 + +x\mathrm{e}^y \\ C'(y) &= 0 \\ C(y) &= D \end{aligned}$$

Torej je rešitev:

$$z(x,y) = x^2y + x\mathrm{e}^y + D = 0$$

5. Z znižanjem reda reši diferencialno enačbo

$$xy''' + 2y'' + x = 0.$$

Rešitev:
V enačbi ne nastopata y in y', zato za novo odvisno spremenljivko vzamemo $u = y''$ in dobimo enačbo

$$xu' + 2u + x = 0.$$

To je nehomogena linearna DE 1. reda, ki jo rešimo z ločitvijo spremenljivk in variacijo konstante.
Homogeni del:

$$\begin{aligned} xu' + 2u &= 0 \\ x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} &= -2u \\ \int \frac{\mathrm{d}u}{u} &= -2\int \frac{\mathrm{d}x}{x}\mathrm{d}x \\ \ln u &= -2\ln x + \ln C \\ u_H &= Cx^{-2} \end{aligned}$$

Partikularna rešitev:

$$u(x) = C(x)x^{-2} \quad \Rightarrow \quad u'(x) = C'(x)x^{-2} - 2C(x)x^{-3}$$

Vstavimo v enačbo:

$$C'(x)x^{-1} - 2C(x)x^{-2} + 2C(x)x^{-2} + x = 0$$

Torej je:

$$\begin{aligned} C'(x) &= -x^2 \\ C(x) &= -\frac{x^3}{3} \end{aligned}$$

Zato je partikularna rešitev $u_P = -\frac{x}{3}$, in splošna rešitev

$$u(x) = -\frac{x}{3} + Cx^{-2}$$

Rešitev za u sedaj še dvakrat integriramo, da dobimo rešitev za y:

$$\begin{aligned} y'(x) &= \int u(x)\mathrm{d}x = \int \left(-\frac{x}{3} + Cx^{-2}\right) \mathrm{d}x = -\frac{x^2}{6} - Cx^{-1} + D \\ y(x) &= \int y'(x)\mathrm{d}x = \int \left(-\frac{x^2}{6} - Cx^{-1} + D\right) \mathrm{d}x = -\frac{x^3}{18} - C\ln x + Dx + E \end{aligned}$$