REŠITVE

Naloga 1 (20 točk)
Dan je trikotnik z oglišči $A(1,0,1)$, $B(-2,1,3)$ in $C(3,3,3)$. Izračunajte oziroma določite:

- koordinate težišča T trikotnika ABC,
- enačbo ravnine Π, ki je vzporedna vektorjema $\vec{a} = (1,2,-1)$ in $\vec{b} = (-1,0,3)$ ter gre skozi oglišče A,
- razdaljo med težiščem T in ravnino Π.

Najprej izračunajmo koordinate težišča trikotnika ABC:

$$\vec{r_T} = \frac{1}{3}(\vec{r_A} + \vec{r_B} + \vec{r_C}) = \frac{1}{3}((1,0,1) + (-2,1,3) + (3,3,3)) = \frac{1}{3}(2,4,7) = (\frac{2}{3}, \frac{4}{3}, \frac{7}{3}).$$

Sedaj določimo enačbo ravnine Π. Njeno normalo dobimo kot vektorski produkt vektorjev $\vec{a} = (1,2,-1)$ in $\vec{b} = (-1,0,3)$:

$$\vec{n} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 3 \end{vmatrix} = (6,-2,2) = 2 \cdot (3,-1,1).$$

Za normalo lahko vzamemo vektor $(3,-1,1)$. Iskana enačba je zato oblike

$$3x - y + z = d,$$

kjer dobimo d kot skalarni produkt normale in koordinatnega vektorja točke $A(1,0,1)$:

$$d = (3,-1,1) \cdot (1,0,1) = 3 + 0 + 1 = 4.$$

Sledi enačba ravnine Π:

$$3x - y + z = 4.$$

Razdaljo med težiščem T trikotnika ABC in ravnino Π izračunamo po formuli:

$$d(T,\Pi) = |\frac{3 \cdot \frac{2}{3} - \frac{4}{3} + \frac{7}{3} - 4}{\sqrt{3^2 + (-1)^2 + 1^2}}| = \frac{1}{\sqrt{11}} = \frac{\sqrt{11}}{11}.$$

Naloga 2 (20 točk)

Ali je matrika $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 2 & 2 \\ 4 & 4 & 3 & 3 \\ 5 & 5 & 4 & 4 \end{bmatrix}$ obrnljiva? Odgovor utemeljite.

Poiščite tudi vse rešitve x enačbe

$$A \cdot x = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Ker ima matrika A po dva enaka stolpca, sledi, da je njena determinanta enaka 0. To pa pomeni, da je matrika A singularna oz. neobrnljiva.

Dano matrično enačbo lahko obravnavamo kot sistem linearnih enačb, ki ga rešimo z Gaussovo eliminacijo. Torej:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 2 & 2 & 0 \\ 4 & 4 & 3 & 3 & 1 \\ 5 & 5 & 4 & 4 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & -5 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{array}\right] \qquad \begin{array}{c} 2 \cdot v2 - 3 \cdot v1 \\ v3 - 2 \cdot v1 \\ 2 \cdot v4 - 5 \cdot v1 \\ \hline v3 - v2 \\ v4 - 3 \cdot v2 \end{array}$$

Vidimo, da je rang matrike A enak 2, rang razširjene matrike pa je enak 3. Ker sta ranga različna, sistem nima rešitve.

Naloga 3 (20 točk)

Funkcijo

$$f(x) = 2x - 3$$

razvijte v Fourierovo vrsto na intervalu $[0, \pi]$.

Ker je dolžina intervala enaka π, bo Fourierova vrsta oblike

$$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(2nx) + b_n \sin(2nx)).$$

Izračunajmo torej koeficiente:

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} f(x)\, dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} (2x - 3)\, dx = \frac{1}{\pi} \left[2 \cdot \frac{x^2}{2} - 3x \right]_0^{\pi} = \pi - 3.$$

Pri izračunu a_n za $n = 1, 2, 3, \ldots$ bomo uporabili integracijo po delih ($u = 2x - 3 \Rightarrow du = 2dx$ in $dv = \cos(2nx)dx \Rightarrow v = \frac{1}{2n}\sin(2nx)$). Torej:

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos(2nx)\, dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} (2x - 3) \cos(2nx)\, dx = \\ &= \frac{2}{\pi} \left(\left[(2x - 3) \cdot \frac{1}{2n} \cdot \sin(2nx) \right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \frac{2}{2n} \cdot \sin(2nx)\, dx \right) = \\ &= \frac{2}{\pi} \left[\frac{1}{2n^2} \cdot \cos(2nx) \right]_0^{\pi} = \frac{1}{\pi n^2}(1 - 1) = 0. \end{aligned}$$

Tudi pri izračunu b_n za $n = 1, 2, 3, \ldots$ bomo uporabili integracijo po delih ($u = 2x - 3 \Rightarrow du = 2dx$ in $dv = \sin(2nx)dx \Rightarrow v = -\frac{1}{2n}\cos(2nx)$). Torej:

$$\begin{aligned}
b_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin(2nx)\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(2x-3)\sin(2nx)\,dx = \\
&= \frac{2}{\pi}\left(\left[-(2x-3)\cdot\frac{1}{2n}\cdot\cos(2nx)\right]_0^{\pi} + \int_0^{\pi}\frac{2}{2n}\cdot\cos(2nx)\,dx\right) = \\
&= \frac{2}{\pi}\left(-\frac{1}{2n}\cdot(2\pi-3) - 3\cdot\frac{1}{2n} + \left[\frac{1}{2n^2}\cdot\sin(2nx)\right]_0^{\pi}\right) = -\frac{2}{\pi}\cdot\frac{\pi}{n} = -\frac{2}{n}.
\end{aligned}$$

Sledi, na intervalu $[0, \pi]$ razvijemo funkcijo $f(x)$ v Fourierovo vrsto kot

$$f(x) = \pi - 3 - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n}\sin(2nx).$$

Naloga 4 (20 točk)

Poiščite splošno rešitev $y(x)$ diferencialne enačbe

$$y''' + y' = -2\sin(2x).$$

Dana je linearna diferencialna enačba s konstantnimi koeficienti. Splošna rešitev je sestavljena iz rešitve homogenega dela (y_h) in partikularne rešitve (y_p):

$$y = y_h + y_p.$$

a.) Homogeni del (računamo y_h):

$$y''' + y' = 0.$$

Vzamemo nastavek $y_h = e^{\lambda}$ in dobimo karakteristično enačbo:

$$\begin{aligned}
\lambda^3 + \lambda &= 0, \\
\lambda(\lambda^2 + 1) &= 0, \\
\lambda(\lambda - i)(\lambda + i) &= 0,
\end{aligned}$$

katere rešitve so:

$$\begin{aligned}
\lambda_1 &= 0, \\
\lambda_2 &= i, \\
\lambda_3 &= -i.
\end{aligned}$$

Sledi rešitev homogenega dela:

$$y_h = C_1e^{\lambda_1 x} + C_2e^{\lambda_2 x} + C_3e^{\lambda_3 x} = C_1 + C_2e^{ix} + C_3e^{-ix} = D_1 + D_2\sin x + D_3\cos x,$$

kjer smo obe eksponentni funkciji (tj. e^{ix} in e^{-ix}) razpisali po Eulerjevi formuli, da smo v rešitvi dobili $\sin x$ in $\cos x$.

b.) Nehomogeni del (računamo y_p):

$$y''' + y' = -2\sin(2x).$$

Nastavek za partikularno rešitev je

$$y_p = A\sin(2x) + B\cos(2x).$$

Nastavek 3-krat odvajamo,

$$\begin{aligned} y &= A\sin(2x) + B\cos(2x), \\ y' &= 2A\cos(2x) - 2B\sin(2x), \\ y'' &= -4A\sin(2x) - 4B\cos(2x), \\ y''' &= -8A\cos(2x) + 8B\sin(2x), \end{aligned}$$

in vstavimo v diferencialno enačbo:

$$\begin{aligned} (-8A\cos(2x) + 8B\sin(2x)) + (2A\cos(2x) - 2B\sin(2x)) &= -2\sin(2x), \\ -6A\cos(2x) + 6B\sin(2x) &= -2\sin(2x). \end{aligned}$$

Sledi sistem enačb (izenačimo koeficienta pred $\sin(2x)$ *in* $\cos(2x)$*):*

$$\begin{aligned} -6A &= 0, \\ 6B &= -2. \end{aligned}$$

Rešitev sistema je $A = 0$ in $B = -\frac{1}{3}$. Sledi partikularna rešitev:

$$y_p = -\frac{1}{3}\cos(2x).$$

Splošna rešitev diferencialne enačbe je zato

$$y = y_h + y_p = D_1 + D_2\sin x + D_3\cos x - \frac{1}{3}\cos(2x).$$

Naloga 5 (20 točk)

Poiščite tisto rešitev $y(x)$ diferencialne enačbe

$$y''x - x\sin x = 1,$$

ki zadošča pogojema $y(\frac{\pi}{2}) = \frac{\pi}{2}(\ln\frac{\pi}{2} - 1)$ in $y'(\frac{\pi}{2}) = \ln\frac{\pi}{2}$.

Ker neznana funkcija $y(x)$ v diferencialni enačbi nastopa samo enkrat, to je kot $y''(x)$, funkcijo $y''(x)$ iz enačbe izrazimo:

$$y'' = \frac{1 + x\sin x}{x} = \frac{1}{x} + \sin x.$$

Iskano funkcijo $y(x)$ *sedaj dobimo tako, da zgornjo funkcijo dvakrat integriramo:*

$$\begin{aligned} y' &= \ln x - \cos x + C_1, \\ y &= x \ln x - x - \sin x + C_1 x + C_2. \end{aligned}$$

Pri integriranju funkcije $\ln x$ *smo uporabili metodo integriranja po delih (tj.* $u = \ln x \;\Rightarrow\; du = \frac{dx}{x}$ *in* $dv = dx \;\Rightarrow\; v = x$*).*

Končno poiščimo še tisto rešitev, ki zadošča danima pogojema:

$$\begin{aligned} y(\frac{\pi}{2}) = \frac{\pi}{2}(\ln\frac{\pi}{2} - 1): &\quad \tfrac{\pi}{2}\ln\tfrac{\pi}{2} - \tfrac{\pi}{2} - \sin\tfrac{\pi}{2} + C_1 \cdot \tfrac{\pi}{2} + C_2 = \tfrac{\pi}{2}(\ln\tfrac{\pi}{2} - 1), \\ y'(\frac{\pi}{2}) = \ln\frac{\pi}{2}: &\quad \ln\tfrac{\pi}{2} - \cos\tfrac{\pi}{2} + C_1 = \ln\tfrac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

Iz druge enačbe sledi $C_1 = 0$*. Tedaj se prva enačba poenostavi v*

$$\frac{\pi}{2}\ln\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} - 1 + C_2 = \frac{\pi}{2}(\ln\frac{\pi}{2} - 1)$$

oziroma

$$-1 + C_2 = 0,$$

od koder dobimo $C_2 = 1$*. Sledi*

$$y = x \ln x - x - \sin x + 1.$$