REŠITVE

Naloga 1 (20 točk)

Izračunajte skalarni produkt $(2\vec{a}-3\vec{b})\cdot(4\vec{b}-\vec{a})$, kjer sta $\vec{a}$ in $\vec{b}$ vektorja z dolžinama $|\vec{a}|=2$ in $|\vec{b}|=3$, kot med njima pa je enak $\frac{\pi}{4}$.

Najprej skalarni produkt razpišimo (množimo vsakega z vsakim):

$$\begin{aligned}(2\vec{a}-3\vec{b})\cdot(4\vec{b}-\vec{a}) &= 2\vec{a}\cdot 4\vec{b}-2\vec{a}\cdot\vec{a}-3\vec{b}\cdot 4\vec{b}+3\vec{b}\cdot\vec{a}\\ &= 11\vec{a}\cdot\vec{b}-2\vec{a}\cdot\vec{a}-12\vec{b}\cdot\vec{b}.\end{aligned}$$

Ker velja $\vec{a}\cdot\vec{a}=|\vec{a}|^2$, $\vec{b}\cdot\vec{b}=|\vec{b}|^2$ *in* $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos\frac{\pi}{4}$, *dobimo:*

$$\begin{aligned}(2\vec{a}-3\vec{b})\cdot(4\vec{b}-\vec{a}) &= 11\cdot|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos\frac{\pi}{4}-2\cdot|\vec{a}|^2-12\cdot|\vec{b}|^2\\ &= 11\cdot 2\cdot 3\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}-2\cdot 4-12\cdot 9=33\sqrt{2}-116.\end{aligned}$$

Naloga 2 (20 točk)

Dana je tristrana piramida z oglišči $A(1,0,1)$, $B(0,1,1)$, $C(0,0,1)$ in $D(-1,-4,3)$.

a.) Katero oglišče je najmanj oddaljeno od ravnine π z enačbo $2x-y=3$? Odgovor utemeljite.

b.) Poiščite presečišče ravnine π, ki je dana z enačbo $2x-y=3$, ter premice, ki gre skozi točki A in B.

a.) Oddaljenost točke $T(x_0,y_0,z_0)$ *od ravnine* $\pi: ax+by+cz=d$ *izračunamo po formuli*

$$d(T,\pi)=\frac{|ax_0+by_0+cz_0-d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}.$$

Za dana oglišča tristrane piramide sledi:

$$\begin{aligned}d(A,\pi) &= \frac{|2\cdot 1-0-3|}{\sqrt{2^2+(-1)^2+0^2}}=\frac{1}{\sqrt{5}},\\ d(B,\pi) &= \frac{|2\cdot 0-1-3|}{\sqrt{5}}=\frac{4}{\sqrt{5}},\\ d(C,\pi) &= \frac{|2\cdot 0-0-3|}{\sqrt{5}}=\frac{3}{\sqrt{5}},\\ d(D,\pi) &= \frac{|2\cdot(-1)-(-4)-3|}{\sqrt{5}}=\frac{1}{\sqrt{5}}.\end{aligned}$$

Najbližje ravnini π *sta točki* A *in* D.

b.) Najprej zapišimo enačbo premice skozi točki $A(1,0,1)$ in $B(0,1,1)$. Smerni vektor te premice je

$$\vec{s} = \vec{AB} = (0,1,1) - (1,0,1) = (-1,1,0),$$

zato se paramatrična oblika enačbe premice glasi takole:

$$\begin{aligned} x &= a_1 + s_1 \cdot t = 1 - t, \\ y &= a_2 + s_2 \cdot t = 0 + t, \\ z &= a_3 + s_3 \cdot t = 1. \end{aligned}$$

Presečišče premice in ravnine dobimo, če zgornje opise koordinat točk na premici vstavimo v enačbo ravnine:

$$2(1-t) - t = 3.$$

Sledi $t = -\frac{1}{3}$ in iskano presečišče je točka $P(\frac{4}{3}, -\frac{1}{3}, 1)$.

Naloga 3 (20 točk)

Naj bo $\mathcal{L} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ linearna preslikava, definirana s pomočjo vektorskega produkta na naslednji način:

$$\mathcal{L}(\vec{x}) = \vec{x} \times (1,2,-1).$$

a.) Poiščite matriko v standardni bazi, ki predstavlja linearno preslikavo $\mathcal{L}$.

b.) Poiščite vse realne lastne vrednosti preslikave $\mathcal{L}$.

c.) Kateri vektorji se s preslikavo $\mathcal{L}$ preslikajo v vektor $(0,0,0)$?

a.) Matriko linearne preslikave $\mathcal{L}$ sestavljajo slike vektorjev iz standardne baze:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(1,0,0) &= (1,0,0) \times (1,2,-1) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = (0,1,2), \\ \mathcal{L}(0,1,0) &= (0,1,0) \times (1,2,-1) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = (-1,0,-1), \\ \mathcal{L}(0,0,1) &= (0,0,1) \times (1,2,-1) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = (-2,1,0). \end{aligned}$$

Iskana matrika je zato

$$L = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

b.) Lastne vrednosti matrike dobimo iz enačbe $\det(L-\lambda I)=0$. *Računajmo:*

$$\begin{aligned} \det(L-\lambda I) &= \begin{vmatrix} -\lambda & -1 & -2 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 2 & -1 & -\lambda \end{vmatrix} \begin{matrix} -\lambda & -1 \\ 1 & -\lambda \\ 2 & -1 \end{matrix} = -\lambda^3-2+2-4\lambda-\lambda-\lambda= \\ &= -\lambda^3-6\lambda=-\lambda(\lambda^2+6). \end{aligned}$$

Enačba $-\lambda(\lambda^2+6)=0$ *ima eno samo realno rešitev, to je lastno vrednost* $\lambda=0$. *Ostali dve rešitvi sta kompleksni.*

Do istega rezultat bi prišli tudi brez matrike, samo z razmislekom. Vektorski produkt dveh vektorjev je namreč vektor, ki je pravokoten na oba vektorja. V primeru, da sta dana vektorja vzporedna, pa je njun vektorski produkt enak $(0,0,0)$. *Edini vektorji, katerim preslikava ohranja smer, so zato vektorji, ki so vzporedni vektorju* $(1,2,-1)$ *iz definicije linearne preslikave* $\mathcal{L}$. *Tem lastnim vektorjem pripadajoča lastna vrednost je zato vrednost* 0.

c.) Iz zgornjega razmisleka sledi, da so to natanko vektorji, ki so vzporedni vektorju $(1,2,-1)$, *torej vektorji oblike*

$$(k,2k,-k),\ \text{kjer je } k \text{ poljubno realno število.}$$

Do istega rezultat pridemo, če rešimo homogen sistem linearnih enačb:

$$L\cdot\vec{x}=(0,0,0).$$

Naloga 4 (20 točk)

Izračunajte približno vrednost določenega integrala

$$\int_0^1 \frac{\cos x-1}{x}\,dx,$$

tako da funkcijo pod integralom zamenjate s Taylorjevim polinomom 5-te stopnje.

Funkcijo pod integralom $\frac{\cos x-1}{x}$ *najprej razvijmo v Taylorjevo vrsto:*

$$\frac{\cos x-1}{x}=\frac{(1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\cdots)-1}{x}=-\frac{x}{2!}+\frac{x^3}{4!}-\frac{x^5}{6!}+\cdots.$$

Sedaj računajmo

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{\cos x-1}{x}\,dx &\doteq \int_0^1 (-\frac{x}{2!}+\frac{x^3}{4!}-\frac{x^5}{6!})\,dx=\left[-\frac{x^2}{2\cdot 2!}+\frac{x^4}{4\cdot 4!}-\frac{x^6}{6\cdot 6!}\right]_0^1 \\ &= -\frac{1}{2\cdot 2!}+\frac{1}{4\cdot 4!}-\frac{1}{6\cdot 6!}=-\frac{2072}{12\cdot 6!}=-\frac{259}{1080}. \end{aligned}$$

Naloga 5 (20 točk)

Poiščite rešitev začetnega problema:

$$\begin{aligned} y'(x) - 2y(x) &= e^{3x} \cdot \sin x, \\ y(0) &= \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

Dana je linearna diferencialna enačba s konstantnimi koeficienti. Splošna rešitev je sestavljena iz rešitve homogenega dela (y_h) in partikularne rešitve (y_p):

$$y = y_h + y_p.$$

a.) Homogeni del (računamo y_h):

$$y' - 2y = 0.$$

Vzamemo nastavek $y_h = e^{\lambda}$ in dobimo karakteristično enačbo:

$$\begin{aligned} \lambda - 2 &= 0, \\ \lambda &= 2. \end{aligned}$$

Sledi rešitev homogenega dela:

$$y_h = Ce^{2x}.$$

b.) Nehomogeni del (računamo y_p):

$$y'(x) - 2y(x) = e^{3x} \cdot \sin x.$$

Ker ima dana linearna diferencialna enačba konstantne koeficiente, imamo dve možnosti za nastavek:

$$\begin{aligned} y_p &= C(x) \cdot e^{2x} \quad \textit{(kot pri linearni diferencialni enačbi 1. reda)}, \\ y_p &= e^{3x} \cdot (A \sin x + B \cos x) \quad \textit{(kot pri lin. dif.i enačbi s konst. koef.)}. \end{aligned}$$

Vzemimo na primer drugo obliko nastavka. Nastavek odvajamo,

$$y' = 3e^{3x} \cdot (A \sin x + B \cos x) + e^{3x} \cdot (A \cos x - B \sin x),$$

in vstavimo v diferencialno enačbo:

$$3e^{3x} \cdot (A \sin x + B \cos x) + e^{3x} \cdot (A \cos x - B \sin x) - 2e^{3x} \cdot (A \sin x + B \cos x) = e^{3x} \cdot \sin x.$$

Sledi sistem enačb (izenačimo koeficienta pred $e^{3x} \sin x$ in $e^{3x} \cos x$):

$$\begin{aligned} e^{3x} \sin x : \ 3A - B - 2A &= 1, \\ e^{3x} \cos x : \ 3B + A - 2B &= 0. \end{aligned}$$

Rešitev sistema je $A = \frac{1}{2}$ in $B = -\frac{1}{2}$. Sledi partikularna rešitev:

$$y_p = \frac{1}{2} \cdot e^{3x} \cdot (\sin x - \cos x).$$

Splošna rešitev diferencialne enačbe je zato

$$y = y_h + y_p = Ce^{2x} + \frac{1}{2}e^{3x}(\sin x - \cos x).$$

Rešitev začetnega problema je tista funkcija y, *ki zadošča začetnemu pogoju* $y(0) = \frac{3}{2}$. *Iz pogoja*

$$\frac{3}{2} = Ce^0 + \frac{1}{2}e^0(\sin 0 - \cos 0) = C - \frac{1}{2}$$

sledi $C = 2$ *in rešitev začetnega problema je funkcija*

$$y = 2e^{2x} + \frac{1}{2}e^{3x}(\sin x - \cos x).$$