IZPIT IZ MATEMATIKE II

Univerzitetni študij

23. junij 2010

1. Določi vrednost parametra t tako, da bosta vektorja $\vec{a} = (2t, 4, 2)$ in $\vec{b} = (-3, 2, -t)$ pravokotna. Izračunaj še ploščino paralelograma, ki ga napenjata vektorja $\vec{a}$ in $\vec{b}$.

   Rešitev:
   Dva vektorja sta pravokotna, ko je njun skalarni produkt enak 0.
   ($\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$) Dobimo

   $$\vec{a} \cdot \vec{b} = (2t, 4, 2) \cdot (-3, 2, -t) = -8t + 8 = 0 \quad \Rightarrow \quad t = 1.$$

   Torej $\vec{a} = (2, 4, 2)$ in $\vec{b} = (-3, 2, -1)$. Ploščina paralelograma je enaka dolžini vektorskega produkta.

   $$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 2 & 4 & 2 \\ -3 & 2 & -1 \end{vmatrix} = (-8, -4, 16) = 4(-2, -1, 4)$$

   Sledi
   $$p = |\vec{a} \times \vec{b}| = 4\sqrt{21}$$

2. Obravnavaj sistem enačb glede na vrednost parametra $a \in \mathbb{R}$.

   $$\begin{aligned} ax + y &= a^2 \\ x + ay &= 1 \end{aligned}$$

   Rešitev:
   Sestavimo razširjeno matriko koeficientov in jo reduciramo

   $$\left[\begin{array}{cc|c} a & 1 & a^2 \\ 1 & a & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} a & 1 & a^2 \\ 0 & a^2-1 & a-a^2 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} a & 1 & a^2 \\ 0 & (a-1)(a+1) & a(1-a) \end{array}\right]$$

   Obravnavamo primere:

   - $a = -1$: sistem nima rešitve

- $a = 1$: sistem ima neskončno rešitev

$$x = t, \quad y = 1 - t, \quad t \in \mathbb{R}$$

- $a = 0$: sistem ima natanko eno rešitev

$$x = 1, \quad y = 0$$

- $a \neq -1, 1, 0$: sistem ima natanko eno rešitev

$$x = \frac{a+2}{a+1}, \quad y = \frac{-a}{a+1}$$

3. Dana je funkcija $f(x) = px + q$ na intervalu $[-\pi, \pi]$. Določi koeficienta p in q tako, da bosta koeficienta a_0 in b_3 v razvoju v Fourierovo vrsto enaka $a_0 = 3$ in $b_3 = 4$.

   Rešitev:

   Izračunamo oba koeficienta:

$$\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} (px+q)\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2\pi}\left(\frac{px^2}{2} + qx\right)\Big|_{-\pi}^{\pi} \\
&= \frac{1}{2\pi}\left(\frac{p\pi^2}{2} - \frac{p\pi^2}{2} + q\pi + q\pi\right) \\
&= q = 3
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
b_3 &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(3x)\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} (px+q)\sin(3x)\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{\pi}\left(-\frac{1}{3}(px+q)\cos(3x)\Big|_{-\pi}^{\pi} + \frac{p}{3}\int_{-\pi}^{\pi}\cos(3x)\right) \\
&= \frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{3}(p\pi+q) - \frac{1}{3}(-p\pi+q) + \frac{p}{9}\underbrace{\sin(3x)\Big|_{-\pi}^{\pi}}_{=0}\right) \\
&= \frac{2p}{3} = 4 \quad \Rightarrow \quad p = 6
\end{aligned}$$

   Torej je $f(x) = 6x + 3$.

4. Določi in klasificiraj lokalne ekstreme funkcije

$$f(x,y) = \mathrm{e}^{2x}\left(2x^2 + 2xy - 3y + \frac{1}{2}\right).$$

Rešitev:
Najprej izračunamo oba prva parcialna odvoda:

$$\begin{aligned} f_x &= \mathrm{e}^{2x}\left(4x^2 + 4xy + 4x - 4y + 1\right) \\ f_y &= \mathrm{e}^{2x}(2x-3) \end{aligned}$$

Kritične točke dobimo tam, kjer sta oba prva parcialna odvoda enaka 0. Dobimo sistem enačb $\mathrm{e}^{2x}\left(4x^2 + 4xy + 4x - 4y + 1\right) = 0$ in $\mathrm{e}^{2x}(2x-3) = 0$. Iz druge enačbe takoj dobimo $x = \frac{3}{2}$. To vstavimo v prvo enačbo in dobimo $y = -8$. Dobimo eno kritično točko: $T(\frac{3}{2}, -8)$.
Nato izračunamo vse druge parcialne odvode:

$$\begin{aligned} f_{xx} &= 2\mathrm{e}^{2x}(4x^2 + 4xy - 2y + 8x + 3) \\ f_{xy} &= 4\mathrm{e}^{2x}(x-1) \\ f_{yy} &= 0 \end{aligned}$$

Zato je

$$\begin{aligned} A &= f_{xx}(\frac{3}{2}, -8) = -16\mathrm{e}^3 \\ B &= f_{xy}(\frac{3}{2}, -8) = 2\mathrm{e}^3 \\ C &= f_{yy}(\frac{3}{2}, -8) = 0 \\ \Delta &= AC - B^2 = -4\mathrm{e}^6 < 0 \end{aligned}$$

V kritični točki imamo sedlo.

5. Ali je dana diferencialna enačba eksaktna? Če je, poišči tisto rešitev, ki ustreza pogoju $y(\mathrm{e}) = -\frac{\mathrm{e}^3}{3}$.

$$\left(x^2 + \frac{y}{x}\right)\mathrm{d}x + \ln x\,\mathrm{d}y = 0$$

Rešitev:
Diferencialna enačba je eksaktna, če je $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$.

$$\begin{aligned} P(x,y) &= x^2 + \frac{y}{x} \\ Q(x,y) &= \ln x \end{aligned}$$

Ker je $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{1}{x}$ in $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{1}{x}$, je ta pogoj izpolnjen.
Rešitev iščemo v obliki $z(x,y) = C$.
Najprej uporabimo enakost $z_x = P(x,y)$:

$$z = \int P(x,y)\mathrm{d}x = \int \left(x^2 + \frac{y}{x}\right)\mathrm{d}x = \frac{x^3}{3} + y\ln x + C(y)$$

Sedaj uporabimo še enakost $z_y = Q(x,y)$:

$$\begin{aligned} \ln x + C'(y) &= \ln x \\ C'(y) &= 0 \\ C(y) &= \text{konst.} \end{aligned}$$

Dobimo:

$$z(x,y) = \frac{x^3}{3} + y\ln x = C$$

Upoštevamo še začetni pogoj $y(\mathrm{e}) = -\frac{\mathrm{e}^3}{3}$:

$$\frac{e^3}{3} - \frac{e^3}{3}\ln \mathrm{e} = C \quad \Rightarrow \quad C = 0$$

Torej je rešitev:

$$z(x,y) = \frac{x^3}{3} + y\ln x = 0$$