IZPIT IZ MATEMATIKE II

Univerzitetni študij

30. avgust 2010

1. Izračunajte volumen paralelepipeda, ki ga napenjajo vektorji $3\vec{a}-\vec{b}$, $2\vec{a}+\vec{c}$ in $-2\vec{b}+3\vec{c}$, kjer je $|\vec{a}|=|\vec{b}|=2$, $|\vec{c}|=3$ in so vektorji $\vec{a}$, $\vec{b}$ in $\vec{c}$ paroma pravokotni.

   NAMIG: Telo, ki ga napenjajo trije paroma pravokotni vektorji, je kvader.

   Rešitev:
   Volumen paralelepipeda izračunamo takole:

$$\begin{aligned}
V &= |(3\vec{a}-\vec{b}, 2\vec{a}+\vec{c}, -2\vec{b}+3\vec{c})| \\
&= |((3\vec{a}-\vec{b})\times(2\vec{a}+\vec{c}))\cdot(-2\vec{b}+3\vec{c})| \\
&= |(6\underbrace{\vec{a}\times\vec{a}}_{=0}-2\vec{b}\times\vec{a}+3\vec{a}\times\vec{c}-\vec{b}\times\vec{c})\cdot(-2\vec{b}+3\vec{c})| \\
&= |4\underbrace{(\vec{b},\vec{a},\vec{b})}_{=0}-6(\vec{a},\vec{c},\vec{b})+2\underbrace{(\vec{b},\vec{c},\vec{b})}_{=0}-6(\vec{b},\vec{a},\vec{c})+9\underbrace{(\vec{a},\vec{c},\vec{c})}_{=0}-3\underbrace{(\vec{b},\vec{c},\vec{c})}_{=0}| \\
&= |12(\vec{a},\vec{b},\vec{c})| = 144
\end{aligned}$$

   Upoštevali smo namig: $|(\vec{a},\vec{b},\vec{c})| = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot|\vec{c}| = 12$.

2. Poiščite vse rešitve enačbe $XA-B=3X$, kjer je

$$A=\begin{bmatrix} 6 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}, \qquad B=\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

   Rešitev:
   Matrično enačbo najprej preuredimo in transponiramo, nato pa rešimo z Gaussovo eliminacijo.

$$\begin{aligned}
XA-B &= 3X \\
X(A-3I) &= B \\
(A-3I)^T X^T &= B^T
\end{aligned}$$

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 3 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -8 & -1 \end{array}\right]$$

Dobimo:

$$X = \begin{bmatrix} 3 & -8 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

3. Poiščite vrednost parametra $a \in \mathbb{R}$ tako, da bo funkcija

$$f(x, y) = \ln(ax^2 + y^2)$$

harmonična. Funkcija $f(x, y)$ je harmonična, ko je $f_{xx} + f_{yy} = 0$.

Rešitev:

Izračunamo vse potrebne odvode:

$$f_x = \frac{2ax}{ax^2 + y^2} \qquad f_y = \frac{2y}{ax^2 + y^2}$$
$$f_{xx} = \frac{2ay^2 - 2a^2x^2}{(ax^2 + y^2)^2} \qquad f_{yy} = \frac{2ax^2 - 2y^2}{(ax^2 + y^2)^2}$$

Iz enačbe $f_{xx} + f_{yy} = \frac{2ay^2 - 2a^2x^2 + 2ax^2 - 2y^2}{(ax^2+y^2)^2} = 0$ sledi, da je $a = 1$.

4. Dana je družina elips $\frac{x^2}{C^2} + y^2 = 1$. Določite ortogonalno trajektorijo na to družino, ki gre skozi točko $T(0, 1)$.

Rešitev:

Najprej krivulje odvajamo in se znebimo konstante $C^2 = \frac{x^2}{1-y^2}$:

$$\frac{2x}{C^2} - 2yy' = 0 \quad \Rightarrow \quad y' = \frac{x}{C^2 y} = \frac{1 - y^2}{xy}$$

Nato sestavimo novo diferencialno enačbo po danem pravilu.

$$y_t' = \frac{xy}{y^2 - 1}$$

To je enačba z ločljivima spremenljivkama. Rešitev so ortogonalne trajektorije.

$$\begin{aligned} y' &= \frac{xy}{y^2 - 1} \\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= \frac{xy}{y^2 - 1} \\ \int \frac{(y^2 - 1)\mathrm{d}y}{y} &= \int x \mathrm{d}x \\ \frac{y^2}{2} - \ln y &= \frac{x^2}{2} + D \end{aligned}$$

Vstavimo še dano točko $T(0,1)$ in dobimo $D = \frac{1}{2}$.
Ortogonalna trajektorija, ki gre skozi dano točko:

$$y^2 - x^2 - 2\ln y = 1.$$

5. Poiščite splošno rešitev diferencialne enačbe

$$y'' - 3y' + 2y = (x^2 + x)\mathrm{e}^{2x}.$$

Rešitev:

Najprej rešimo homogeni del $y'' - 3y' + 2y = 0$ z nastavkom $y = \mathrm{e}^{\lambda x}$ in dobimo karakteristično enačbo $\lambda^2 - 3\lambda + 2 = (\lambda - 1)(\lambda - 2) = 0$, z rešitvama $\lambda_1 = 1$ in $\lambda_2 = 2$. Homogena rešitev

$$y_H = C_1\mathrm{e}^x + C_2\mathrm{e}^{2x}.$$

Partikularno rešitev poiščemo z nastavkom, ki je produkt nastavkov za eksponentno funkcijo in polinom:

$$y_P = (Ax^2 + Bx + C)x\mathrm{e}^{2x} = (Ax^3 + Bx^2 + Cx)\mathrm{e}^{2x}.$$

Množenje z x je potrebno, ker je koeficient v eksponentu enak eni izmed rešitev karakteristične enačbe. Dvakrat odvajamo

$$\begin{aligned} y_P' &= (2Ax^3 + (3A + 2B)x^2 + (2B + 2C)x + C)\mathrm{e}^{2x}, \\ y_P'' &= (4Ax^3 + (12A + 4B)x^2 + (6A + 8B + 4C)x + 2B + 4C)\mathrm{e}^{2x}, \end{aligned}$$

vstavimo v enačbo in dobimo

$$\begin{aligned} &(4Ax^3 + (12A + 4B)x^2 + (6A + 8B + 4C)x + 2B + 4C)\mathrm{e}^{2x} \\ &\quad -3(2Ax^3 + (3A + 2B)x^2 + (2B + 2C)x + C)\mathrm{e}^{2x} \\ &\quad +2(Ax^3 + Bx^2 + Cx)\mathrm{e}^{2x} = (x^2 + x)\mathrm{e}^{2x} \end{aligned}$$

Primerjava koeficientov pri istih funkcijah da enačbe $3A = 1$, $6A+2B = 1$ in $2B + C = 0$, ki ima rešitev $A = \frac{1}{3}$, $B = -\frac{1}{2}$ in $C = 1$. Torej je partikularna rešitev enaka

$$y_P = (\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + x)\mathrm{e}^{2x}.$$

Splošna rešitev je vsota partikularne rešitve in rešitve homogenega dela:

$$y(x) = y_P = (\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + x)\mathrm{e}^{2x} + C_1\mathrm{e}^x + C_2\mathrm{e}^{2x}.$$