REŠITVE

Naloga 1 (20 točk)

Izračunajte determinanto

$$\begin{vmatrix} 2 & -2 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 5 & -1 \\ 1 & -2 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 1 & 3 \\ 4 & -4 & 1 & -1 & 0 \end{vmatrix}.$$

Determinanto bomo razvili do velikosti 3×3, *potem pa uporabili znano formulo za izračun determinante te velikosti:*

$$\begin{vmatrix} 2 & -2 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 5 & -1 \\ 1 & -2 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 1 & 3 \\ 4 & -4 & 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -2 & 5 & 1 & -3 \\ 0 & -1 & 11 & 5 & -16 \\ 1 & -2 & 1 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & -4 & -1 & -1 & 3 \end{vmatrix} \quad \begin{matrix} s3 + 2\times s4 \\ s5 - 3\times s4 \end{matrix}$$

$$= 1\cdot \begin{vmatrix} 2 & -2 & 5 & -3 \\ 0 & -1 & 11 & -16 \\ 1 & -2 & 1 & 5 \\ 4 & -4 & -1 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 3 & -13 \\ 0 & -1 & 11 & -16 \\ 1 & -2 & 1 & 5 \\ 0 & 4 & -5 & -17 \end{vmatrix} \quad \frac{\textit{razvoj po 4. vrstici}}{\begin{matrix} v1 - 2\times v3 \\ v4 - 4\times v3 \end{matrix}}$$

$$= 1\cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 & -13 \\ -1 & 11 & -16 \\ 4 & -5 & -17 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -13 \\ -1 & 11 & -16 \\ 4 & -5 & -17 \end{vmatrix}\begin{matrix} 2 & 3 \\ -1 & 11 \\ 4 & -5 \end{matrix} \quad \frac{\textit{razvoj po 1. stolpcu}}{\begin{matrix}\textit{formula za izračun} \\ \textit{determinante 3. reda}\end{matrix}}$$

$$= 2\cdot 11\cdot(-17) + 3\cdot(-16)\cdot 4 + (-13)\cdot(-1)\cdot(-5) - 4\cdot 11\cdot(-13)$$
$$- (-5)\cdot(-16)\cdot 2 - (-17)\cdot(-1)\cdot 3 = -270.$$

Naloga 2 (20 točk)

Poiščite vrednosti neznank x, y, z in u, ki nastopajo v enačbi

$$\begin{bmatrix} 4x - y & -x + 4y - z \\ -y + 4z - u & -z + 4u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 10 \end{bmatrix}.$$

Dve matriki sta enaki, kadar imata enake vse istoležne elemente. Dobimo sistem linearnih enačb:

$$\begin{aligned} 4x - y &= 2, \\ -x + 4y - z &= 5, \\ -y + 4z - u &= 3, \\ -z + 4u &= 10. \end{aligned}$$

Zapišimo razširjeno matriko tega sistema:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 4 & -1 & 0 & 0 & 2 \\ -1 & 4 & -1 & 0 & 5 \\ 0 & -1 & 4 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 4 & 10 \end{array}\right].$$

Rešitev sistema zdaj lahko poiščemo s pomočjo Gaussove eliminacije:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 4 & -1 & 0 & 0 & 2 \\ -1 & 4 & -1 & 0 & 5 \\ 0 & -1 & 4 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 4 & 10 \end{array}\right] \equiv \left[\begin{array}{cccc|c} 4 & -1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 15 & -4 & 0 & 22 \\ 0 & -1 & 4 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 4 & 10 \end{array}\right] 4 \times v2 + v1$$
$$\equiv \left[\begin{array}{cccc|c} 4 & -1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 15 & -4 & 0 & 22 \\ 0 & 0 & 56 & -15 & 67 \\ 0 & 0 & -1 & 4 & 10 \end{array}\right] \equiv \left[\begin{array}{cccc|c} 4 & -1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 15 & -4 & 0 & 22 \\ 0 & 0 & 56 & -15 & 67 \\ 0 & 0 & 0 & 209 & 627 \end{array}\right] \frac{15 \times v3 + v2}{56 \times v4 + v3}.$$

Ranga matrike koeficientov sistema in razširjene matrike sta enaka številu neznank, zato je sistem enolično rešljiv. Poenostavljena (zgornjetrikotna) oblika sistema se glasi takole:

$$\begin{aligned} 4x - y &= 2, \\ 15y - 4z &= 22, \\ 56z - 15u &= 67, \\ 209u &= 627. \end{aligned}$$

Dobimo rešitev: $u = 3$, $z = 2$, $y = 2$ *in* $x = 1$.

Naloga 3 (20 točk)

Izračunajte približno vrednost določenega integrala

$$\int_0^2 \frac{\sin(3x)}{x}\, dx,$$

tako da funkcijo pod integralom razvijete v Taylorjevo vrsto do vključno 4. potence.

Funkcijo pod integralom

$$\frac{\sin(3x)}{x}$$

razvijmo v Taylorjevo vrsto. Uporabili bomo znano Taylorjevo vrsto za sinusno funkcijo:

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots, \quad |x| < \infty.$$

Dobimo iskano Taylorjevo vrsto do vključno 4. potence:

$$\frac{\sin(3x)}{x} = \frac{3x - \frac{(3x)^3}{3!} + \frac{(3x)^5}{5!} - \cdots}{x} = 3 - \frac{3^3}{3!}x^2 + \frac{3^5}{5!}x^4 - \cdots = 3 - \frac{9}{2}x^2 + \frac{81}{40}x^4 - \cdots$$

Sedaj izračunajmo še približno vrednost integrala:

$$\int_0^2 \frac{\sin(3x)}{x}\,dx \approx \int_0^2 (3 - \frac{9}{2}x^2 + \frac{81}{40}x^4)\,dx = 3x - \frac{9}{2}\cdot\frac{x^3}{3} + \frac{81}{40}\cdot\frac{x^5}{5}\Big|_0^2$$
$$= 3\cdot 2 - \frac{9}{2}\cdot\frac{2^3}{3} + \frac{81}{40}\cdot\frac{2^5}{5} = 6 - 12 + \frac{324}{25} = \frac{174}{25}.$$

Naloga 4 (20 točk)

Ob času $t = 0\,s$ priklopimo tuljavo in zaporedno vezan upor na enosmerno napetost. Časovno odvisnost električnega toka, ki teče skozi tuljavo, opisuje diferencialna enačba

$$L\frac{dI}{dt} + RI = U.$$

- Za upor z upornostjo $R = 5\Omega$, tuljavo z induktivnostjo $L = 2H$ in napetost $U = 5V$ poiščite tok $I(t)$. Ne pozabite upoštevati začetnega pogoja, tj. da ob času $t = 0\,s$ (tik po priklopu) skozi tuljavo še ne teče električni tok.
- Kakšen tok teče skozi tuljavo ob času $t = 2\,s$?

Ko v diferencialno enačbo

$$L\frac{dI}{dt} + RI = U$$

vstavimo podatke, dobimo

$$2I' + 5I = 5.$$

To je na primer linearna diferencialna enačba 1. reda s konstantnimi koeficienti (tudi dif. enačba z ločljivima spremenljivkama). Njena splošna rešitev je sestavljena iz dveh delov:

$$I(t) = I_h(t) + I_p(t),$$

kjer je I_h rešitev homogenega dela, I_p pa partikularna rešitev.

A.) Homogeni del (računamo I_h):

$$2I' + 5I = 0,$$
$$2\lambda + 5 = 0,$$
$$\lambda = -\frac{5}{2}.$$

Sledi $I_h(t) = Ae^{-\frac{5}{2}t}$.

B.) Nehomogeni del (računamo I_p):

Ker je desna stran dif. enačbe konstantna (polinom ničte stopnje) in $\alpha + i\beta = 0$ ni rešitev karakteristične enačbe iz homogenega dela, za nastavek vzamemo

$$I_p = B.$$

Ker je tedaj $I' = 0$, sledi:

$$\begin{aligned} 2I' + 5I &= 5, \\ 2 \cdot 0 + 5 \cdot B &= 5, \\ B &= 1. \end{aligned}$$

Dobimo partikularno rešitev $I_p(t) = 1$.

Sledi splošna rešitev dif. enačbe:

$$I(t) = Ae^{-\frac{5}{2}t} + 1.$$

Upoštevati moramo še začetni pogoj:

$$\begin{aligned} I(0) &= 0, \\ 0 &= Ae^{-\frac{5}{2}\cdot 0} + 1, \\ 0 &= A + 1, \\ A &= -1. \end{aligned}$$

Sledi časovno odvisna funkcija električnega toka, ki teče skozi tuljavo:

$$I(t) = 1 - e^{-\frac{5}{2}t}.$$

Ob času $t = 2s$ dobimo tok

$$I(2) = 1 - e^{-5} = \frac{e^5 - 1}{e^5} \approx 0,993262A.$$

Naloga 5 (20 točk)

Poiščite splošno rešitev $y(x)$ diferencialne enačbe

$$x^2 y''' - y' = 0.$$

Enačbi lahko znižamo red ali pa jo pomnožimo z x, da dobimo Eulerjevo diferencialno enačbo:

$$x^3 y''' - xy' = 0.$$

Zapišimo in rešimo karakteristično enačbo:

$$\begin{aligned} \lambda(\lambda-1)(\lambda-2)-\lambda &= 0, \\ \lambda(\lambda^2-3\lambda+1) &= 0, \\ \lambda_1 = 0,\ \lambda_{2,3} &= \frac{3\pm\sqrt{5}}{2}. \end{aligned}$$

Splošna rešitev dobljene Eulerjeve diferencialne enačbe se zato glasi takole:

$$y(x) = C_1 x^{\lambda_1} + C_2 x^{\lambda_2} + C_3 x^{\lambda_3} = C_1 + C_2 x^{\frac{3+\sqrt{5}}{2}} + C_3 x^{\frac{3-\sqrt{5}}{2}}.$$