IZPIT IZ MATEMATIKE II

1. julij 2011

1. Določite parameter a tako, da bo sistem enačb

$$\begin{aligned} 2x - 3y + z &= 7 \\ x + y + 3z &= a \\ x - y + z &= 2 \end{aligned}$$

rešljiv. Dobljen sistem nato tudi rešite.

Rešitev.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 1 & 7 \\ 1 & 1 & 3 & a \\ 1 & -1 & 1 & 2 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 1 & 7 \\ 0 & -5 & -5 & 7-2a \\ 0 & -1 & -1 & 3 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 1 & 7 \\ 0 & -5 & -5 & 7-2a \\ 0 & 0 & 0 & -8-2a \end{array}\right]$$

Da bo sistem rešljiv, mora veljati $-8 - 2a = 0$ oziroma $a = -4$.

Tako dobimo sistem

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 1 & 7 \\ 0 & -5 & -5 & 15 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 1 & 7 \\ 0 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

iz katerega dobimo $y + z = -3$ in $2x - 3y + z = 7$ oziroma recimo z poljuben, $y = -z - 3$ in $x = -2z - 1$.

2. Izračunajte vse lastne vrednosti matrike $D = A \cdot B - C$, kjer je

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -3 \\ 3 & -2 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \\ -3 & -2 & 0 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 4 & 1 & -3 \\ 4 & 4 & 5 \\ 4 & -1 & -10 \end{bmatrix}$$

Izračunajte tudi lastni vektor matrike D, ki pripada najmanjši lastni vrednosti.

Rešitev.

$$D = A \cdot B - C = \begin{bmatrix} 5 & 3 & 0 \\ 7 & 6 & 6 \\ 8 & 3 & -6 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4 & 1 & -3 \\ 4 & 4 & 5 \\ 4 & -1 & -10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 4 & 4 & 4 \end{bmatrix}$$

$$
\det(D-\lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & 3 \\ 3 & 2-\lambda & 1 \\ 4 & 4 & 4-\lambda \end{vmatrix} =
$$

$$
= (1-\lambda)(2-\lambda)(4-\lambda) + 8 + 36 - 12(2-\lambda) - 4(1-\lambda) - 6(4-\lambda) =
$$

$$
= ... = -\lambda^3 + 7\lambda^2 + 8\lambda = -\lambda(\lambda+1)(\lambda-8)
$$

Tako dobimo lastne vrednosti $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = -1$ in $\lambda_3 = 8$.

Za najmanjšo lastno vrednost (torej $\lambda_2 = -1$) poiščimo še pripadajoči lasten vektor.

$$
\begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 1 \\ 4 & 4 & 5 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}
$$

Tako dobimo $z = 0$ in $2x + 2y = 0 \Rightarrow y = -x$ oziroma $[x, -x, 0]^T$. Lasten vektor je tako recimo $[1, -1, 0]^T$.

3. S pomočjo razvoja v Taylorjevo vrsto izračunajte

$$
\lim_{x\to 0} \frac{3x^3 + \sin x - x\cos x}{\log(1+x) + \frac{1}{1+x} + x - e^x}.
$$

Rešitev.

$$
... = \lim_{x\to 0} \frac{3x^3 + \left(x - \frac{x^3}{6} + ...\right) - x\left(1 - \frac{x^2}{2} + ...\right)}{\left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - ...\right) + \left(1 - x + x^2 - x^3 + ...\right) + x - \left(1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + ...\right)} =
$$

$$
= \lim_{x\to 0} \frac{x^3(3 - \frac{1}{6} + \frac{1}{2}) + x^5(...)}{x^3(-1 - \frac{1}{6} + \frac{1}{3}) + x^4(...)} = \lim_{x\to 0} \frac{3 - \frac{1}{6} + \frac{1}{2} + x^2(...)}{-1 - \frac{1}{6} + \frac{1}{3} + x(...)} = \frac{3 - \frac{1}{6} + \frac{1}{2}}{-1 - \frac{1}{6} + \frac{1}{3}} =
$$

$$
= ... = -4
$$

4. Določite in klasificirajte vse lokalne ekstreme funkcije

$$
f(x, y) = x^3 + 3xy^2 - y^3 - 3x^2 - 9x + 3.
$$

Rešitev.

$$
\begin{aligned}
f &= x^3 + 3xy^2 - y^3 - 3x^2 - 9x + 3 \\
f_x &= 3x^2 + 3y^2 - 6x - 9 = 3(x^2 + y^2 - 2x - 3) \\
f_y &= 6xy - 3y^2 = 3y(2x - y)
\end{aligned}
$$

Za lokalne ekstreme je potreben pogoj $f_x = 0$ in $f_y = 0$. Iz enačbe $f_y = 0$ takoj vidimo, da mora veljati $y = 0$ ali $y = 2x$. Če vstavimo $y = 0$ v enačbo $f_x = 0$, dobimo $(x-3)(x+1) = 0$ in s tem prvi dve stacionarni točki $T_1(3,0)$ in $T_2(-1,0)$. V drugem primeru $y = 2x$ pa dobimo $5x^2 - 2x - 3 = 0$ oziroma $(5x+3)(x-1) = 0$. Tako dobimo še drugi dve stacionarni točki $T_3\big(-\frac{3}{5}, -\frac{6}{5}\big)$ in $T_4(1,2)$. Za klasifikacijo stacionarnih točk si poračunajmo še druge parcialne odvode

$$f_{xx} = 6x - 6, \quad f_{xy} = 6y, \quad f_{yy} = 6x - 6y$$

in s tem k vsaki stacionarni točki pripadajoče Hessejeve determinante

$$H_1 = 216 > 0, \quad H_2 = 72 > 0, \quad H_3 = -\frac{432}{5} < 0, \quad H_4 = -144 < 0.$$

Iz tega vidimo, da T_1 in T_2 v resnici sta ekstrema, T_3 in T_4 sta pa sedli. Ker velja $f_{xx}(T_1) = 12 > 0$ in $f_{xx}(T_2) = -12 < 0$, je T_1 minimum in T_2 maksimum.

5. Rešite diferencialno enačbo
$$y' + 2y = -2y^2 e^{4x}.$$

Rešitev. Opazimo, da imamo Bernoullijevo diferencialno enačbo za $\alpha = 2$ in zato uvedimo substitucijo $z = y^{1-\alpha} = \frac{1}{y}$. Tako dobimo $y = \frac{1}{z}$ in $z' = -\frac{1}{y^2}y'$ oziroma $y' = -\frac{z'}{z^2}$. S tem dobimo nehomogeno linearno diferencialno enačbo

$$-\frac{z'}{z^2} + \frac{2}{z} = -2e^{4x}\frac{1}{z^2} \quad \text{oziroma} \quad z' - 2z = 2e^{4x}.$$

Najprej rešimo homogeni del (ki je vedno tipa ločljivih spremenljivk)

$$\begin{aligned} z' - 2z &= 0 \\ \frac{dz}{z} &= 2dx \\ \log z &= 2x + \log C \\ z_H &= Ce^{2x} \end{aligned}$$

Sedaj uporabimo variacijo konstante:

$$\begin{aligned} z &= C(x)e^{2x} \\ z' &= C'(x)e^{2x} + 2C(x)e^{2x} \\ \big(C'(x)e^{2x} + 2C(x)e^{2x}\big) - 2\big(C(x)e^{2x}\big) &= 2e^{4x} \\ C'(x)e^{2x} &= 2e^{4x} \\ C'(x) &= 2e^{2x} \\ C(x) &= \int 2e^{2x}dx \\ C(x) &= e^{2x} + D \end{aligned}$$

Partikularna rešitev se tako glasi $z_P = e^{4x}$, kar nam da splošno rešitev

$$z = z_H + z_P = Ce^{2x} + e^{4x}.$$

Za konec uporabimo še začetno substitucijo

$$y = \frac{1}{z} = \frac{1}{Ce^{2x} + e^{4x}}$$