REŠITVE

Naloga 1 (20 točk)

Vektorja $\vec{a} = (0,1,1)$ in $\vec{b} = (1,0,1)$ oklepata trikotnik v prostoru. Izračunajte:

- kot med vektorjema $\vec{a}$ in $\vec{b}$,
- pravokotno projekcijo vektorja $\vec{b}$ na vektor $\vec{a}$,
- višino trikotnika na stranico, ki jo določa vektor $\vec{a}$.

Računajmo po vrsti.

- *Kot med vektorjema $\vec{a}$ in $\vec{b}$ izračunamo po formuli*

$$\cos\varphi = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|} = \frac{(0,1,1)\cdot(1,0,1)}{|(0,1,1)|\cdot|(1,0,1)|} = \frac{1}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}} = \frac{1}{2}.$$

  Kot med vektorjema je torej enak $60°$ ali $\frac{\pi}{3}$.

- *Pravokotno projekcijo vektorja $\vec{b}$ na vektor $\vec{a}$ izračunamo po formuli*

$$proj_{\vec{a}}\vec{b} = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|}\cdot\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} = \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{(0,1,1)}{\sqrt{2}} = (0,\frac{1}{2},\frac{1}{2}).$$

  Pravokotna projekcija vektorja $\vec{b}$ na vektor $\vec{a}$ je torej vektor z enako smerjo kot $\vec{a}$ in polovično dolžino.

- *Da bi izračunali višino trikotnika na stranico, ki jo določa vektor $\vec{a}$, lahko najprej izračunamo*

$$\vec{v_{\vec{a}}} = \vec{b} - proj_{\vec{a}}\vec{b} = (1,0,1) - (0,\frac{1}{2},\frac{1}{2}) = (1,-\frac{1}{2},\frac{1}{2}).$$

  Iskana višina je zdaj ravno dolžina tega vektorja:

$$v_a = |\vec{v_{\vec{a}}}| = |(1,-\frac{1}{2},\frac{1}{2})| = \sqrt{1+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{3}{2}}.$$

Naloga 2 (20 točk)

Dana je matrika

$$A = \begin{bmatrix} -5 & 5 & -6 \\ -2 & t-1 & -6 \\ -1 & 1 & -t \end{bmatrix}.$$

- Najdite vse take t, da bo determinanta matrike A enaka 0.
- Določite tak t, da bo $\vec{x} = [2, 2, t-2]^T$ lastni vektor matrike A, in najdite pripadajočo lastno vrednost.

Računajmo po vrsti.

- *Poglejmo najprej, za katere t je determinanta matrike A enaka 0:*

$$\det A = \left|\begin{array}{ccc|cc} -5 & 5 & -6 & -5 & 5 \\ -2 & t-1 & -6 & -2 & t-1 \\ -1 & 1 & -t & -1 & 1 \end{array}\right. = 5t(t-1) + 30 + 12 - 6(t-1) - 30 - 10t$$
$$= 5t^2 - 21t + 18 = (5t-6)(t-3) = 0.$$

To je res v dveh primerih: $t_1 = \frac{6}{5}$ in $t_2 = 3$.

- *Vektor $\vec{x} = [2, 2, t-2]^T$ bo lastni vektor matrike A, če bo veljalo*

$$A\vec{x} = \lambda\vec{x},$$

kjer je λ iskana lastna vrednost. Ko vstavimo podatke, dobimo:

$$\begin{bmatrix} -5 & 5 & -6 \\ -2 & t-1 & -6 \\ -1 & 1 & -t \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ t-2 \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ t-2 \end{bmatrix},$$
$$\begin{bmatrix} -6t+12 \\ -4t+6 \\ -t^2+2t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\lambda \\ 2\lambda \\ (t-2)\lambda \end{bmatrix}.$$

Dobili smo sistem treh linearnih enačb:

$$\begin{aligned} -6t + 12 &= 2\lambda, \\ -4t + 6 &= 2\lambda, \\ -t^2 + 2t &= (t-2)\lambda. \end{aligned}$$

Iz prvih dveh enačb, ko ju na primer odštejemo, sledi $t = 3$ in $\lambda = -3$. Ker ti dve vrednosti zadoščata tudi zadnji enačbi, je $\vec{x} = [2, 2, 1]^T$ lastni vektor matrike A, $\lambda = -3$ pa pripadajoča lastna vrednost.

Naloga 3 (20 točk)

Periodična funkcija $f(t)$ s periodo 2π je na intervalu $0 \le t \le 2\pi$ definirana s predpisom

$$f(t) = \begin{cases} t & 0 \le t \le \frac{\pi}{2} \\ -\frac{1}{3}t + \frac{2}{3}\pi & \frac{\pi}{2} \le t \le 2\pi \end{cases}.$$

Skicirajte graf funkcije na intervalu $-2\pi \le t \le 4\pi$ in poiščite Fourierovo vrsto funkcije f.

Ker je dolžina intervala enaka 2π, bo Fourierova vrsta oblike

$$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nt) + b_n \sin(nt)).$$

Izračunajmo torej koeficiente:

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t)\,dt = \frac{1}{2\pi} \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} t\,dt + \int_{\frac{\pi}{2}}^{2\pi} (-\frac{1}{3}t + \frac{2}{3}\pi)\,dt \right) \\ &= \frac{1}{2\pi} \left(\left[\frac{t^2}{2} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \left[-\frac{t^2}{6} + \frac{2t}{3}\pi \right]_{\frac{\pi}{2}}^{2\pi} \right) = \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

Pri izračunu a_n za $n = 1, 2, 3, \dots$ uporabimo integracijo po delih ($u = -\frac{1}{3}t + \frac{2}{3}\pi \;\Rightarrow\; du = -\frac{1}{3}dt$ in $dv = \cos(nt)dt \;\Rightarrow\; v = \frac{1}{n}\sin(nt)$). Torej:

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \cos(nt)\,dt = \frac{1}{\pi} \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} t \cos(nt)\,dt + \int_{\frac{\pi}{2}}^{2\pi} (-\frac{1}{3}t + \frac{2}{3}\pi) \cos(nt)\,dt \right) = \\ &= \frac{4\cos\frac{n\pi}{2} - 4}{3n^2\pi}. \end{aligned}$$

Tudi pri izračunu b_n za $n = 1, 2, 3, \dots$ bomo uporabili integracijo po delih ($u = -\frac{1}{3}t + \frac{2}{3}\pi \;\Rightarrow\; du = -\frac{1}{3}dt$ in $dv = \sin(nt)dt \;\Rightarrow\; v = -\frac{1}{n}\cos(nt)$). Torej:

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \sin(nt)\,dt = \frac{1}{\pi} \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} t \sin(nt)\,dt + \int_{\frac{\pi}{2}}^{2\pi} (-\frac{1}{3}t + \frac{2}{3}\pi) \sin(nt)\,dt \right) = \\ &= \frac{4\sin(\frac{n\pi}{2})}{3n^2\pi}. \end{aligned}$$

Sledi razvoj funkcije f v Fourierovo vrsto:

$$f(t) = \frac{\pi}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{4\cos\frac{n\pi}{2} - 4}{3n^2\pi} \cos(nt) + \frac{4\sin(\frac{n\pi}{2})}{3n^2\pi} \sin(nt) \right).$$

Naloga 4 (20 točk)

Poiščite splošno rešitev $y(x)$ diferencialne enačbe

$$y^2\, y' = x^2 + \frac{y^3}{x}.$$

Če diferencialno enačbo delimo z y^2, ugotovimo, da je homogena:

$$y' = \left(\frac{x}{y} \right)^2 + \frac{y}{x}.$$

Sedaj uvedemo novo spremenljivko $u = \frac{y}{x}$ $(y = xu$ *in* $y' = u + xu')$ *in dobimo diferencialno enačbo z ločljivima spremenljivkama:*

$$\begin{aligned} u + xu' &= \frac{1}{u^2} + u, \\ xu' &= \frac{1}{u^2}, \\ x\frac{du}{dx} &= \frac{1}{u^2}, \\ u^2 du &= \frac{dx}{x}, \\ \int u^2 du &= \int \frac{dx}{x}, \\ \frac{u^3}{3} &= \ln x + \ln C, \\ \frac{u^3}{3} &= \ln (Cx), \\ u^3 &= 3 \ln (Cx). \end{aligned}$$

Potem ko spet uvedemo $u = \frac{y}{x}$, *dobimo rešitev začetne diferencialne enačbe:*

$$\begin{aligned} \left(\frac{y}{x}\right)^3 &= 3 \ln (Cx), \\ \frac{y}{x} &= \sqrt[3]{3 \ln (Cx)}, \\ y &= x\sqrt[3]{3 \ln (Cx)}. \end{aligned}$$

Naloga 5 (20 točk)

Poiščite tisto rešitev $(x(t), y(t))$ sistema diferencialnih enačb,

$$\begin{aligned} x''(t) &= \sin (2t) + 1, \\ y''(t) &= \frac{1}{(t-1)^2}, \end{aligned}$$

ki zadošča pogojem $x(0) = 1$, $x'(0) = 0$, $y(0) = 2$ in $y'(0) = 0$.

Dan sistem neodvisnih diferencialnih enačb rešimo tako, da vsako enačbo po dvakrat integriramo:

$$\begin{aligned} x'(t) &= \int (\sin (2t) + 1)\, dt = -\frac{1}{2} \cos (2t) + t + A, \\ y'(t) &= \int (t-1)^{-2} dt = -\frac{1}{t-1} + C, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x(t) &= \int \left(-\frac{1}{2} \cos (2t) + t + A \right) dt = -\frac{1}{4} \sin (2t) + \frac{t^2}{2} + At + B, \\ y(t) &= \int \left(-\frac{1}{t-1} + C \right) dt = -\ln |t-1| + Ct + D. \end{aligned}$$

Sedaj le še vstavimo pogoje:

$$\begin{aligned}
x(0) = 1: &\quad B = 1, \\
x'(0) = 0: &\quad -\frac{1}{2} + A = 0, \\
y(0) = 2: &\quad D = 2, \\
y'(0) = 0: &\quad 1 + C = 0.
\end{aligned}$$

Dobili smo $A = \frac{1}{2}$, $B = 1$, $C = -1$ *in* $D = 2$. *Sledi rešitev sistema:*

$$\begin{aligned}
x(t) &= -\frac{1}{4}\sin(2t) + \frac{t^2}{2} + \frac{t}{2} + 1, \\
y(t) &= -\ln|t-1| - t + 2.
\end{aligned}$$