REŠITVE

Naloga 1 (20 točk)

Dani sta premica $p: \frac{x+1}{2} = -y + 2 = \frac{z}{3}$ v prostoru in točka $A(-1, 2, 0)$ na njej.

- Določite vse točke na premici p, ki so od točke A oddaljene za $\sqrt{14}$.
- Natančno (z enačbami) opišite šop premic, ki gredo skozi točko A in so pravokotne na premico p.

Rešitev:

- *Smerni vektor premice p je* $\vec{s} = (2, -1, 3)$. *Ker je*

  $$|\vec{s}| = \sqrt{2^2 + (-1)^2 + 3^2} = \sqrt{14},$$

  dobimo koordinate obeh točk na premici p, ki sta od točke A oddaljeni za $\sqrt{14}$, *takole:*

  $$\begin{aligned} \vec{r_1} &= \vec{r_A} + \vec{s} = (-1, 2, 0) + (2, -1, 3) = (1, 1, 3), \\ \vec{r_2} &= \vec{r_A} - \vec{s} = (-1, 2, 0) - (2, -1, 3) = (-3, 3, -3). \end{aligned}$$

  Takšni točki sta torej dve (ena na eni, druga na drugi strani točke A):

  $$T_1(1, 1, 3) \quad \text{in} \quad T_2(-3, 3, -3).$$

- *Premice, ki gredo skozi točko* $A(-1, 2, 0)$, *imajo parametrično obliko enačbe takšno:*

  $$\begin{aligned} x &= -1 + t \cdot s_1, \\ y &= 2 + t \cdot s_2, \\ z &= 0 + t \cdot s_3, \end{aligned}$$

  kjer so s_1, s_2, s_3 *realne koordinate smernih vektorjev teh premic. Ker morajo biti te premice še pravokotne na premico p, mora biti skalarni produkt smernega vektorja premice p in smernega vektorja* (s_1, s_2, s_3) *enak* 0. *To je, za realna števila* s_1, s_2, s_3 *velja*

  $$2s_1 - s_2 + 3s_3 = 0.$$

  S tem smo šop premic, ki gredo skozi točko A in so pravokotne na premico p, natančno opisali. Primer smernega vektorja (s_1, s_2, s_3), *ki zadošča zgornjemu pogoju, je vektor* $(1, 2, 0)$.

Naloga 2 (20 točk)

V sporočilu, sestavljenem iz 3 besed iz 5 črk, smo vsako črko nadomestili (zakodirali) z zaporedno številko te črke v slovenski abecedi. Na primer, črko E smo nadomestili s številko 6, črko Ž pa s številko 25. Tako zakodirane besede smo zapisali v vrstice matrike B, ki je zato dimenzije 3×5. Potem smo matriko B z leve pomnožili z matriko A in dobili smo matriko T:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad T = \begin{bmatrix} 24 & 28 & 30 & 7 & 38 \\ 5 & 16 & 2 & 18 & 16 \\ 5 & 6 & 13 & 1 & 20 \end{bmatrix}.$$

- Določite matriko B.
- Poiščite vsebino sporočila (3 besede iz 5 črk slovenske abecede).

Rešitev:

- *Ker smo matriko B (dimenzije 3×5) z leve pomnožili z matriko A (dimenzije 3×3), da smo dobili matriko T (dimenzije 3×5), velja*

  $$A \cdot B = T,$$

  torej

  $$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot B = \begin{bmatrix} 24 & 28 & 30 & 7 & 38 \\ 5 & 16 & 2 & 18 & 16 \\ 5 & 6 & 13 & 1 & 20 \end{bmatrix}.$$

  Neznano matriko B lahko iz te matrične enačbe dobimo z Gaussovo eliminacijo ali pa s pomočjo inverza matrike A. Inverz matrike A izračunamo hitro (1. vrstici odštejemo 3.):

  $$[A|I] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim [I|A^{-1}].$$

  Sedaj izračunamo

  $$B = A^{-1}T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 24 & 28 & 30 & 7 & 38 \\ 5 & 16 & 2 & 18 & 16 \\ 5 & 6 & 13 & 1 & 20 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 19 & 22 & 17 & 6 & 18 \\ 5 & 16 & 2 & 18 & 16 \\ 5 & 6 & 13 & 1 & 20 \end{bmatrix}.$$

- *Vsebino sporočila dobimo s pretvorbo zaporednih številk (elementov matrike B) v pripadajoče črke slovenske abecede:*

  $$\begin{array}{ccccc} S & U & P & E & R \\ D & O & B & R & O \\ D & E & L & A & \check{S} \end{array}$$

Ker je matrika A precej preprosta, do matrike B in vsebine sporočila lahko še hitreje pridemo, če opazimo, da elemente prve vrstice matrike T dobimo tako, da seštejemo elemente prve in tretje vrstice matrike B. Druga in tretja vrstica pa se pri množenju ne spremenita.

Naloga 3 (20 točk)

Določite razvoj funkcije

$$f(x) = \begin{cases} 1, & -1 \leq x \leq 1 \\ 0, & \text{drugod} \end{cases}$$

v Fourierovo vrsto na intervalu $[-1, 2]$ in izračunajte vrednost te vrste pri $x = 1$.

Rešitev:

Fourierova vrsta funkcije f na intervalu $[-1, 2]$ bo oblike

$$F(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos\left(\frac{2\pi n}{3} x\right) + b_n \sin\left(\frac{2\pi n}{3} x\right)\right),$$

kjer so a_0, a_n in b_n $(n = 1, 2, \ldots)$ Fourierovi koeficienti. Izračunamo jih takole:

$$\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{3} \int_{-1}^{2} f(x)\, dx = \frac{1}{3} \int_{-1}^{1} 1\, dx = \frac{2}{3}, \\
a_n &= \frac{2}{3} \int_{-1}^{2} f(x) \cos\left(\frac{2\pi n}{3} x\right) dx = \frac{2}{3} \int_{-1}^{1} 1 \cdot \cos\left(\frac{2\pi n}{3} x\right) dx = \frac{4}{3} \int_{0}^{1} 1 \cdot \cos\left(\frac{2\pi n}{3} x\right) dx \\
&= \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{\frac{2\pi n}{3}} \sin\left(\frac{2\pi n}{3} x\right)\Bigg|_0^1 = \frac{2}{\pi n} \sin\left(\frac{2\pi n}{3}\right), \\
b_n &= \frac{2}{3} \int_{-1}^{2} f(x) \sin\left(\frac{2\pi n}{3} x\right) dx = \frac{2}{3} \int_{-1}^{1} 1 \cdot \sin\left(\frac{2\pi n}{3} x\right) dx = 0.
\end{aligned}$$

Da bo $b_n = 0$ za $n = 1, 2, \ldots$, bi lahko opazili že prej. To sledi iz sodosti funkcije. Dobili smo kosinusno Fourierovo vrsto

$$F(x) = \frac{2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\pi n} \sin\left(\frac{2\pi n}{3}\right) \cos\left(\frac{2\pi n}{3} x\right).$$

Vrednost te vrste pri $x = 1$, torej $F(1)$, dobimo po znanem izreku, da v točkah nezveznosti Fourierova vrsta zavzame srednjo vrednost leve in desne limite funkcije v tej točki. Torej:

$$F(1) = \frac{1 + 0}{2} = \frac{1}{2}.$$

Naloga 4 (20 točk)

Poiščite vse stacionarne točke funkcije

$$z(x, y) = xy \ln(x^2 + y^2).$$

Ali funkcija z doseže globalni maksimum in kje? Odgovor utemeljite.

Rešitev:
V stacionarnih točkah sta oba prva odvoda funkcije z enaka 0. Iščemo torej točke, za katere velja naslednje:

$$
\begin{aligned}
z'_x &= y\ln(x^2+y^2) + xy\cdot\frac{2x}{x^2+y^2} = y\left(\ln(x^2+y^2) + \frac{2x^2}{x^2+y^2}\right) = 0,\\
z'_y &= x\ln(x^2+y^2) + xy\cdot\frac{2y}{x^2+y^2} = x\left(\ln(x^2+y^2) + \frac{2y^2}{x^2+y^2}\right) = 0.
\end{aligned}
$$

Pri reševanju sistema zdaj lahko ločimo štiri možnosti:

- $x=0$ *in* $y=0$: *dobimo točko* $T_1(0,0)$, *v kateri pa funkcija ni definirana.*
- $x=0$ *in* $\ln(x^2+y^2)+\frac{2x^2}{x^2+y^2}=0$: *če v drugo enačbo vstavimo prvo, dobimo* $\ln y^2 = 0$ *in zato* $y^2=1$ *oziroma* $y=\pm 1$. *Stacionarni točki sta*

$$T_2(0,1) \quad in \quad T_3(0,-1).$$

- $y=0$ *in* $\ln(x^2+y^2)+\frac{2y^2}{x^2+y^2}=0$: *če v drugo enačbo vstavimo prvo, dobimo* $\ln x^2 = 0$ *in zato* $x^2=1$ *oziroma* $x=\pm 1$. *Stacionarni točki sta*

$$T_4(1,0) \quad in \quad T_5(-1,0).$$

- $\ln(x^2+y^2)+\frac{2x^2}{x^2+y^2}=0$ *in* $\ln(x^2+y^2)+\frac{2y^2}{x^2+y^2}=0$: *če enačbi odštejemo, dobimo*

$$\frac{2(x^2-y^2)}{x^2+y^2} = 0 \quad ali \quad y^2 = x^2.$$

  Torej $y=\pm x$ *in stacionarne točke so vse točke oblike*

$$T_A(x,x) \quad in \quad T_B(x,-x),$$

  kjer je $x \in \mathbb{R} - \{0\}$.

Naša funkcija globalnega maksimuma ne doseže, saj je logaritemska funkcija naraščajoča funkcija in z naraščanjem vrednosti x in y narašča tudi funkcijska vrednost $z(x,y)$. Na primer, funkcijska vrednost narašča čez vse meje, ko čez vse meje naraščata x in y. To se zgodi tudi v mnogih drugih primerih (ni nujno, da čez vse meje naraščata oba).

Naloga 5 (20 točk)
Poiščite splošno rešitev diferencialne enačbe

$$x^3y''' - 6x^2y'' + 19xy' - 27y = 0,$$

kjer je $y = y(x)$. Uganite vsaj eno (partikularno) rešitev nehomogene diferencialne enačbe

$$x^3 y''' - 6x^2 y'' + 19xy' - 27y = 1.$$

Rešitev:
Dana je Eulerjeva diferencialna enačba 3. reda. Če vzamemo nastavek $y = x^\lambda$, dobimo karakteristično enačbo:

$$\begin{aligned} \lambda(\lambda-1)(\lambda-2) - 6\lambda(\lambda-1) + 19\lambda - 27 &= 0, \\ \lambda^3 - 9\lambda^2 + 27\lambda - 27 &= 0, \\ (\lambda-3)^3 &= 0. \end{aligned}$$

Rešitev te enačbe je $\lambda_{1,2,3} = 3$, zato sledi splošna rešitev Eulerjeve diferencialne enačbe:

$$y = C_1 x^3 + C_2 x^3 \ln x + C_3 x^3 \ln^2 x.$$

Partikularno rešitev dane nehomogene diferencialne enačbe lahko iščemo v obliki konstantne funkcije $y = C$. To funkcijo odvajajmo $(y' = y'' = y''' = 0)$ in vstavimo v enačbo:

$$\begin{aligned} x^3 y''' - 6x^2 y'' + 19xy' - 27y &= 1, \\ -27C &= 1, \\ C &= -\frac{1}{27}. \end{aligned}$$

Ena rešitev dane nehomogene diferencialne enačbe je zato funkcija $y = -\frac{1}{27}$.