Izpit Matematika II

5.7.2012

Rešitve

1. naloga

Izenačimo vektorja Tu in Tv in ven dobimo pogoj za t. Drug možen sklep bi bil: ker je $T(u-v)=0$, ima homogen sistem z matriko T netrivialno rešitev, zato mora biti $det(T)=0$.

$$Tu = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ -4+3t \end{bmatrix} \quad , \quad Tv = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ -1+2t \end{bmatrix} \quad \to \quad -4+3t = -1+2t \quad \to \quad \boxed{t=3}$$

Potrebno je še rešiti linearen sistem enačb $Tz = w$, ki pa ga ne moremo rešiti z inverzno matriko, saj je T singularna. Zapišemo razširjeno matriko sistema in sistem prevedemo na ekvivalenten diagonalen sistem za neznanki z_1 in z_2:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 1 & 5 \\ 2 & 5 & 3 & 9 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Tukaj preberemo $z_1 = 2 - 4z_3$, $z_2 = 1 + z_3$. Če poljubno izberemo $z_3 = \alpha$, se da rešitev zapisati kot

$$\boxed{z = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \alpha \begin{bmatrix} -4 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}}$$

2. naloga

$$f(x) = \frac{e^x}{1+x^2} = \Big(1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{24}x^4 + \cdots\Big)\Big(1 - x^2 + x^4 - \cdots\Big) =$$

$$\begin{aligned} 1 + x + \frac{1}{2}x^2 &+ \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{24}x^4 + \cdots + \\ -x^2 &- x^3 - \frac{1}{2}x^4 - \cdots + \\ &\qquad\quad x^4 + \cdots = \end{aligned}$$

$$\boxed{1 + x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{5}{6}x^3 + \frac{13}{24}x^4 + \cdots}$$

Ker je splošni člen v *Taylorjevi* vrsti enak $\dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$, se iz enačbe $\dfrac{f'''(0)}{3!} = -\dfrac{5}{6}$ razbere:

$$\boxed{f'''(0) = -5}$$

3. naloga

Rešiti je treba **vezani ekstrem** za *Lagrangeovo* funkcijo

$$F(x,y) = 17x^2 - 12xy + 8y^2 + \lambda(x^2 + y^2 - 5)$$

Potrebni pogoj za ekstrem bo sistem enačb

$$\begin{aligned} 34x - 12y + \lambda 2x &= 0 \\ -12x + 16y + \lambda 2y &= 0 \\ x^2 + y^2 &= 5 \end{aligned}$$

Iz prvih dveh enačb eliminiramo λ, dobimo linearno zvezo med x in y, ki jo vstavimo v enačbo krožnice

$$\frac{\lambda 2x}{\lambda 2y} = \frac{-34x + 12y}{12x - 16y}$$

$$12x^2 - 16xy = -34xy + 12y^2 \qquad / : 2x^2$$

$$6k^2 - 9k - 6 = 0 \qquad , \; k = \tfrac{y}{x}$$

$$k_1 = 2 \quad , \; k_2 = -\tfrac{1}{2}$$

$k_1 = 2 \quad \rightarrow \quad y = 2x \quad \rightarrow \quad x^2 + 4x^2 = 5 \quad \rightarrow \quad T_1(1,2)\ ,\ T_2(-1,-2)$

$k_2 = -\frac{1}{2} \quad \rightarrow \quad x = -2y \quad \rightarrow \quad 4y^2 + y^2 = 5 \quad \rightarrow \quad T_3(-2,1)\ ,\ T_4(2,-1)$

$f(1,2) = f(-1,-2) = 25$

$f(2,-1) = f(-2,1) = 100$

Samo v teh tokah T_i ima lahko funkcija $f(x,y)$ ekstremne vrednosti. Ker je funkcija zvezna sta odgovora:

$$\boxed{f_{max} = 100 \quad , \quad f_{min} = 25}$$

4. naloga

Gre za *linearno dif.enačbo 1.reda.* Najprej rešimo pripadajočo *homogeno* enačbo:

$$y' - \tfrac{1}{2}y = 0$$
$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{2}$$
$$\frac{dy}{y} = \frac{dx}{2}$$
$$\ln y = \tfrac{x}{2} + \ln C$$
$$y_h = Ce^{x/2}$$

Z metodo *variacije konstante* poiščemo *partikularno* rešitev:

$$y_p = C(x)e^{x/2}$$
$$C'(x)e^{x/2} + C(x)e^{x/2}\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}C(x)e^{x/2} = e^x$$
$$C'(x) = e^{x/2}$$
$$C(x) = 2e^{x/2}$$
$$y_p = 2e^x$$

V *splošno* rešitev se vstavi še pogoj $y(0) = -1$ in se dobi rezultat.

$y = y_h + y_p = Ce^{x/2} + 2e^x$

$y(0) = -1 \quad \rightarrow \quad C + 2 = -1 \quad \rightarrow \quad C = /3$

$\boxed{y = 2e^x - 3e^{x/2}}$

5. naloga

Prvo enačbo odvajamo po t: $\dddot{x}= 2\dot{y} + 8e^{2t}$

Sem vstavimo $\dot{y}$ iz druge enačbe: $\dddot{x}= 6\dot{x} + 2y + 8e^{2t}$

Sem vstavimo $2y = \ddot{x} - 4e^{2t}$, kar dobimo iz prve dif. enačbe. Na ta način se v celoti znebimo neznanke $y(t)$: $\dddot{x}= 6\dot{x} + \ddot{x} - 4e^{2t} + 8e^{2t}$

Za neznanko $x(t)$ se po ureditvi dobi **lin. dif. enačbo s konst. koeficienti**:

$$\dddot{x} - \ddot{x} - 6\dot{x} = 4e^{2t}$$

$$\begin{aligned} \lambda^3 - \lambda^2 - 6\lambda &= 0 \\ \lambda(\lambda^2 - \lambda - 6) &= 0 \\ \lambda(\lambda + 2)(\lambda - 3) &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_p &= De^{2t} \\ 8De^{2t} - 4De^{2t} - 12De^{2t} &= 4e^{2t} \\ D &= -\tfrac{1}{2} \end{aligned}$$

$$x = x_h + x_p$$

$$\boxed{x(t) = A + Be^{-2t} + Ce^{3t} - \frac{1}{2}e^{2t}}$$

Ko že imamo $x(t)$ se iz prve dif. enačbe izračuna še $y = \frac{1}{2}\ddot{x} - 2e^{2t}$.

$$\boxed{y(t) = 2Be^{-2t} + \frac{9}{2}Ce^{3t} - 3e^{2t}}$$