IZPIT IZ MATEMATIKE II

Univerzitetni študij

10. september 2012

1. Obravnavajte sistem linearnih enačb

$$\begin{aligned} x+y+z &= 1, \\ x-y-3z &= 2, \\ 3x+y+az &= b. \end{aligned}$$

V vseh primerih, ko ima sistem rešitev, le-to zapišite. Pri katerem pogoju za parametra a in b dobimo rešitev $x=\frac{3}{2}$, $y=-\frac{1}{2}$ in $z=0$?

Rešitev:
Redukcija razširjene matrike koeficientov

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -3 & 2 \\ 3 & 1 & a & b \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -4 & 1 \\ 0 & -2 & a-3 & b-3 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & a+1 & b-4 \end{array}\right]$$

Obravnava primerov:

- $a=-1$, $b\neq 4$: sistem nima rešitve
- $a=-1$, $b=4$: sistem ima neskončno rešitev

$$x=z+\frac{3}{2}, \quad y=-2z-\frac{1}{2}, \quad z\in\mathbb{R}$$

- $a\neq -1$: sistem ima natanko eno rešitev

$$x=\frac{3a+2b-5}{2(a+1)}, \quad y=\frac{15-a-4b}{2(a+1)}, \quad z=\frac{b-4}{a+1}$$

Rešitev $x=\frac{3}{2}$, $y=-\frac{1}{2}$ in $z=0$ dobimo pri pogoju $b=4$.

2. Določite konvergenčni polmer vrste

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^{n-1}(x-1)^n}{n}.$$

Določite še območje konvergence dane vrste.

Rešitev:
Konvergenčni radij:

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{3^{n-1}}{n}}{\frac{3^n}{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{3n}=\frac{1}{3}.$$

Robova območja:

- $x = \frac{2}{3}$: alternirajoča vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3n}$ — konvergira po Lebnitzevem kriteriju,
- $x = \frac{4}{3}$: harmonična vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3n}$ — divergira.

Območje konvergence je interval $[\frac{2}{3}, \frac{4}{3})$.

3. Z uporabo totalnega diferenciala izračunajte približno vrednost izraza

$$\sqrt{(4.03)^2 + (2.95)^2}.$$

Kako bi lahko izboljšali kvaliteto aproksimacije?

Rešitev:
Izberemo funkcijo $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ ter vrednosti $a = 4$, $b = 3$, $h = 0.03$ in $k = -0.05$. Izbrano funkcijo parcialno odvajamo po x in y:

$$f_x(x, y) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \qquad f_y(x, y) = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Približno vrednost določimo po formuli

$$f(a + h, b + k) \approx f(a, b) + f_x(a, b)h + f_y(a, b)k,$$

od koder sledi

$$\sqrt{(4.03)^2 + (2.95)^2} \approx 5 + \frac{4}{5} \cdot \frac{3}{100} - \frac{3}{5} \cdot \frac{5}{100} = 4.994.$$

Kvaliteto aproksimacije lahko izboljšamo npr. z uporabo drugih oz. višjih odvodov (Taylorjeva vrsta za funkcije dveh spremenljivk).

4. Poiščite rešitev diferencialne enačbe

$$xy' + 3y = x^3 y^2.$$

Določite tisto rešitev, katere graf seka krožnico $x^2 + y^2 = 2$ v točki $T(1, 1)$?

Rešitev:
To je Bernoullijeva diferencialna enačba. Najprej enačbo delimo z y^2 in nato uvedemo novo spremenljivko $u = y^{-1}$ in $u' = -y^{-2}y'$, da dobimo nehomogeno linearno diferencialno enačbo prvega reda

$$-xu' + 3u = x^3.$$

(i) Homogena diferencialna enačba.

$$\begin{aligned} -xu' + 3u &= 0 \\ \int \frac{du}{u} &= 3 \int \frac{dx}{x} \\ \ln u &= 3 \ln x + \ln C \\ u_H &= Cx^3 \end{aligned}$$

(ii) Nehomogeno diferencialno enačbo rešimo z variacijo konstante.

$$\begin{aligned} u &= C(x)x^3 \\ u' &= C'(x)x^3 + 3C(x)x^2 \end{aligned}$$

Vstavimo v enačbo in dobimo partikularno rešitev

$$C'(x) = -\frac{1}{x} \quad \Rightarrow \quad C(x) = -\ln x \quad \Rightarrow \quad u_p = -x^3 \ln x.$$

Splošna rešitev:

$$u(x) = u_p + u_H = x^3(C - \ln x).$$

Obratna substitucija, da dobimo rešitev za y:

$$y(x) = \frac{1}{x^3(C - \ln x)}.$$

Z upoštevanjem začetnega pogoja $y(1) = 1$, dobimo $C = 1$. Rešitev začetnega problema:

$$y(x) = \frac{1}{x^3(1 - \ln x)}.$$

5. Poiščite rešitev diferencialne enačbe

$$y'' + 2y' + 5y = 6 + 5x^2,$$

ki zadošča začetnima pogojema $y(0) = \frac{53}{25}$ in $y'(0) = \frac{11}{5}$.

Rešitev:
To je nehomogena linearna diferencialna enačba drugega reda s konstantnimi koeficienti.

(i) Homogena diferencialna enačba.

$$y'' + 2y' + 5y = 0.$$

Uporabimo nastavek $y = \mathrm{e}^{\lambda x}$ in dobimo karakteristično enačbo $\lambda^2 + 2\lambda + 5 = 0$, ki ima dve kompleksni rešitvi $\lambda_{1,2} = -1 \pm 2\mathrm{i}$:

$$y_H = \mathrm{e}^{-x}\left(C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x\right).$$

(ii) Partikularno rešitev dobimo s pomočjo nastavka $y_p = A + Bx + Cx^2$. Odvajamo in dobimo $y_p' = B + 2Cx$ in $y_p'' = 2C$. Vstavimo v enačbo in dobimo

$$2C + 2B + 4Cx + 5A + 5Bx + 5Cx^2 = 6 + 5x^2.$$

Primerjava koeficientov nam da $A = \frac{28}{25}$, $B = -\frac{4}{5}$ in $C = 1$, zato je $y_p = \frac{28}{25} - \frac{4}{5}x + x^2$.

Splošna rešitev:

$$y(x) = y_p + y_H = \mathrm{e}^{-x}\left(C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x\right) + \frac{28}{25} - \frac{4}{5}x + x^2.$$

Vstavimo še začetne pogoje v splošno rešitev in njen odvod

$$y'(x) = -\mathrm{e}^{-x}\left(C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x\right) + \mathrm{e}^{-x}\left(-2C_1 \sin 2x + 2C_2 \cos 2x\right) - \frac{4}{5} + 2x,$$

da dobimo konstanti $C_1 = 1$ in $C_2 = 2$. Rešitev začetnega problema:

$$y(x) = \mathrm{e}^{-x}\left(\cos 2x + 2 \sin 2x\right) + \frac{28}{25} - \frac{4}{5}x + x^2.$$