REŠITVE

Naloga 1 (20 točk)

Izračunajte determinanto matrike

$$A = \begin{bmatrix} 25 & 5 & 0 & -5 & 500 \\ 4 & -4 & 12 & 20 & 0 \\ 3 & 3 & -3 & 0 & 100 \\ 1 & 0 & 1 & -1 & -200 \\ 2 & 2 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Kakšen je lahko rang kvadratne matrike dimenzije $n \times n$ ($n \geq 2$), katere determinanta je enaka 0? Navedite vse možne vrednosti ranga.

Rešitev:

Najprej bomo izpostavili skupne faktorje elementov v nekaterih vrsticah in stolpcih, potem bomo determinantno z razvojem po vrsticah/stolpcih zmanjšali:

$$\begin{aligned}
A &= \begin{bmatrix} 25 & 5 & 0 & -5 & 500 \\ 4 & -4 & 12 & 20 & 0 \\ 3 & 3 & -3 & 0 & 100 \\ 1 & 0 & 1 & -1 & -200 \\ 2 & 2 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} = 100 \cdot 5 \cdot 4 \cdot \begin{bmatrix} 5 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 & 5 & 0 \\ 3 & 3 & -3 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 & -2 \\ 2 & 2 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \\
&= 2000 \cdot \begin{bmatrix} 5 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 & 5 & 0 \\ -2 & 2 & -3 & 1 & 0 \\ 11 & 2 & 1 & -3 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} = 2000 \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 & 5 \\ -2 & 2 & -3 & 1 \\ 11 & 2 & 1 & -3 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \\
&= 2000 \cdot \begin{bmatrix} -9 & -11 & -2 & 5 \\ -4 & 0 & -4 & 1 \\ 17 & 8 & 4 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = 2000 \cdot \begin{bmatrix} -9 & -11 & -2 \\ -4 & 0 & -4 \\ 17 & 8 & 4 \end{bmatrix} \\
&= 8000 \cdot 87 = 696\,000.
\end{aligned}$$

Rang kvadratne matrike dimenzije $n \times n$ ($n \geq 2$), katere determinanta je enaka 0, lahko zavzame vrednosti $0, 1, \ldots, n-1$.

Naloga 2 (20 točk)

Pokažite, da je premica skozi točki $(2, 3, 4)$ in $(1, 2, 3)$ pravokotna na premico skozi točki $(0, 0, \frac{9}{2})$ in $(1, 3, \frac{1}{2})$.

Poiščite točko, v kateri se premici sekata.

Rešitev:
Najprej določimo smerna vektorja obeh premic:

$$\begin{aligned}\vec{s_1} &= (2,3,4)-(1,2,3)=(1,1,1),\\ \vec{s_2} &= \left(1,3,\frac{1}{2}\right)-\left(0,0,\frac{9}{2}\right)=(1,3,-4).\end{aligned}$$

Premici sta pravokotni, če sta pravokotna njuna smerna vektorja. To bo natanko takrat, kadar bo skalarni produkt smernih vektorjev enak 0. *V našem primeru to velja:*

$$\vec{s_1}\cdot\vec{s_2}=(1,1,1)\cdot(1,3,-4)=0.$$

Parametrični obliki enačb premic sta naslednji:

$$\begin{aligned} x &= 1+t, & x &= s,\\ y &= 2+t, & y &= 3s,\\ z &= 3+t, & z &= \frac{9}{2}-4s.\end{aligned}$$

Sledi skupna točka $P\left(\frac{1}{2},\frac{3}{2},\frac{5}{2}\right)$.

Naloga 3 (20 točk)

Poiščite vse matrike

$$X=\begin{bmatrix} x_1 & x_2\\ x_3 & x_4\end{bmatrix},$$

za katere velja $(X-5I)(X+2I)=0$.

Napišite primer dveh neničelnih matrik, katerih produkt je enak 0.

Rešitev:
Pogoj pravi naslednje:

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix} x_1-5 & x_2\\ x_3 & x_4-5\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} x_1+2 & x_2\\ x_3 & x_4+2\end{bmatrix} &= 0,\\ \begin{bmatrix} (x_1-5)(x_1+2)+x_2x_3 & x_2(x_1-5)+x_2(x_4+2)\\ x_3(x_1+2)+x_3(x_4-5) & x_2x_3+(x_4-5)(x_4+2)\end{bmatrix} &= 0,\end{aligned}$$

Imamo štiri enačbe s štirimi neznankami:

$$\begin{aligned}(x_1-5)(x_1+2)+x_2x_3 &= 0,\\ x_2(x_1+x_4-3) &= 0,\\ x_3(x_1+x_4-3) &= 0,\\ x_2x_3+(x_4-5)(x_4+2) &= 0.\end{aligned}$$

Iz druge sledi $x_2=0$ *ali* $x_1+x_4-3=0$, *iz tretje pa* $x_3=0$ *ali* $x_1+x_4-3=0$. *Sedaj ločimo širi podprimere:*

- $x_2 = 0$ *in* $x_3 = 0$*: v tem primeru iz prve enačbe sledi* $x_1 = 5$ *ali* $x_1 = -2$*, iz zadnje pa* $x_4 = 5$ *ali* $x_4 = -2$ *(dobimo štiri različne matrike),*
- $x_2 = 0$ *in* $x_3 \neq 0$*: v tem primeru iz tretje enačbe sledi* $x_4 = 3 - x_1$*, iz prve in zadnje pa* $x_1 = 5$ *ali* $x_1 = -2$ *(ker je* $x_3 \neq 0$ *poljuben, dobimo neskončno mnogo matrik),*
- $x_3 = 0$ *in* $x_2 \neq 0$*: v tem primeru iz druge enačbe sledi* $x_4 = 3 - x_1$*, iz prve in zadnje pa* $x_1 = 5$ *ali* $x_1 = -2$ *(ker je* $x_2 \neq 0$ *poljuben, spet dobimo neskončno mnogo matrik),*
- $x_2 \neq 0$ *in* $x_3 \neq 0$*: v tem primeru iz druge in tretje enačbe sledi* $x_4 = 3 - x_1$*, iz prve in zadnje pa* $x_3 = -\frac{(x_1-5)(x_1+2)}{x_2}$ *(ker sta* x_1 *in* $x_2 \neq 0$ *poljubna, dobimo neskončno mnogo matrik).*

Primer dveh neničelnih matrik, katerih produkt je enak 0*:*

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = 0.$$

Naloga 4 (20 točk)

Naj bosta r in a realna parametra. Določite ortogonalne trajektorije dveh družin krivulj:

a.) družine krožnic $x^2 + y^2 = r^2$,

b.) družine parabol $y = ax^2$.

Rešitev:

a.) ortogonalne trajektorije družine krožnic $x^2 + y^2 = r^2$ *so premice skozi koordinatno izhodišče, tj. šop premic* $y = kx$*, kjer je* k *poljubno realno število,*

b.) ortogonalne trajektorije družine parabol $y = ax^2$ *dobimo takole:*

$$\begin{aligned} a &= \frac{y}{x^2}, \\ 0 &= \frac{y'x^2 - 2xy}{x^4}, \\ y' &= \frac{2y}{x}, \\ y' &= -\frac{x}{2y}, \\ 2y dy &= -x dx, \\ \int 2y dy &= -\int x dx, \\ y^2 &= -\frac{x^2}{2} + C, \\ y &= \pm\sqrt{-\frac{x^2}{2} + C}. \end{aligned}$$

To so elipse.

Naloga 5 (20 točk)

Z vpeljavo ustrezne nove spremenljivke prevedite diferencialno enačbo

$$x^3 y^{(5)} - 2xy''' = 0$$

v Eulerjevo diferencialno enačbo. Poiščite splošno rešitev $y(x)$.

Rešitev:
Ko vpeljemo novo spremenljivko $u = y''$, dobimo Eulerjevo diferencialno enačbo:

$$x^3 u''' - 2xu' = 0.$$

Sledi karakteristična enačba

$$\lambda(\lambda - 1)(\lambda - 2) - 2\lambda = 0$$

z rešitvami $\lambda_{1,2} = 0$ in $\lambda_3 = 3$. Tedaj je

$$u = C_1 + C_2 \ln x + C_3 x^3$$

in po dvakratnem integriranju splošna rešitev začetne diferencialne enačbe

$$y = D_1 + D_2 x + D_3 x^2 + D_4 x^5 + D_5 x^2 \ln x.$$

Pri integriranju smo uporabili metodo per partes.