Izpit Matematika II

2.julij 2013

1. Na osi z poiščite točko, ki je enako oddaljena od ravnin $2x + 2y + z = 9$ in $8x + 4y + z = 13$! Poiščite vse take točke!

2. Izračunajte vsoto potenčne vrste
$$1 + 2x^2 + 3x^4 + 4x^6 + 5x^8 + \cdots \quad !$$
Namig: uporabite odvajanje ali integriranje potenčne vrste.

3. Poiščite lokalne ekstreme funkcije
$$f(x, y) = (x^2 + y)\sqrt{e^y} \quad !$$

4. Poiščite splošno rešitev diferencialne enačbe
$$yy' \sin x = (1 - y^2) \cos x \quad !$$

5. Rešite diferencialno enačbo
$$\begin{aligned} y'' + y' &= 2x \\ y(0) &= 1 \\ y'(0) &= -3 \quad ! \end{aligned}$$

Rešitve

1. naloga

$\vec{n}_1 = \sqrt{4+4+1} = 3 \quad , \quad \vec{n}_2 = \sqrt{64+16+1} = 9$

$$d_1(x,y,z) = \left| \frac{2x+2y+z-9}{3} \right|$$

$$d_2(x,y,z) = \left| \frac{8x+4y+z-13}{9} \right|$$

Na osi z sta koordinati x in y enaki 0.

$$\left| \frac{z-9}{3} \right| = \left| \frac{z-13}{9} \right|$$

$|3z-27| = |z-13|$

Ta enačba ima dve rešitvi:

$3z-27 = z-13 \quad \rightarrow \quad z=7 \quad \rightarrow \quad T_1(0,0,7)$

$3z-27 = -(z-13) \quad \rightarrow \quad z=10 \quad \rightarrow \quad T_1(0,0,10)$

$\boxed{T_1(0,0,7) \quad , \quad T_2(0,0,10)}$

2. naloga

$$x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + \cdots = \frac{x}{1-x}$$

$$1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + 5x^4 + \cdots = \left(\frac{x}{1-x}\right)' = \frac{1}{(1-x)^2}$$

Zamenjamo $x \rightarrow x^2$

$$1 + 2x^2 + 3x^4 + 4x^6 + 5x^8 + \cdots = \boxed{\frac{1}{(1-x^2)^2}}$$

3. naloga

$$f_x = 2x\sqrt{e^y}$$

$$f_y = \sqrt{e^y} + (x^2+y)\frac{1}{2\sqrt{e^y}}\,e^y = \sqrt{e^y}\Big(1 + (x^2+y)\frac{1}{2}\Big)$$

Stacionarna točka je $T(0,-2)$

$$f_{xx} = 2\sqrt{e^y}$$

$$f_{yy} = \frac{1}{2\sqrt{e^y}}\,e^y\Big(1+(x^2+y)\frac{1}{2}\Big) + \sqrt{e^y}\,\frac{1}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{e^y}\Big(2+(x^2+y)\frac{1}{2}\Big)$$

$$f_{xy} = 2x\frac{1}{2\sqrt{e^y}}\,e^y = x\sqrt{e^y}$$

$$D(T) = (f_{xx}f_{yy} - {f_{xy}}^2)(T) = \frac{2}{e}\frac{1}{2e} - 0^2 = \frac{1}{e^2}$$

$D > 0$, $f_{xx} > 0 \quad \rightarrow \quad \boxed{\text{minimum v } T(0,-2)}$

4. naloga

To je diferencialna enačba *z ločljivima spremenljivkama.*

$$\frac{yy'}{1-y^2} = \frac{\cos x}{\sin x}$$

$$\int \frac{y\,dy}{1-y^2} = \int \frac{\cos x}{\sin x}dx$$

$$-\frac{1}{2}\ln(1-y^2) = \ln\sin x + \ln C$$

$$\frac{1}{\sqrt{1-y^2}} = C\sin x$$

$$1-y^2 = \frac{1}{C^2\sin^2 x}$$

$$\boxed{y = \pm\sqrt{1+\frac{D}{\sin^2 x}}}$$

druga rešitev

Dif. enačbo lahko rešimo kot *Bernoullijevo.* Nova neznana funkcija je

$z = y^2 \quad , \quad z' = 2yy'$

$$\frac{1}{2}\, z' \sin x + z \cos x = \cos x$$

To je *linearna DE prvega reda*

Homogena enačba:

$$\frac{1}{2}\, z' \sin x + z \cos x = 0$$

$$\frac{1}{2}\, \frac{dz}{dx} \sin x = -z \cos x$$

$$\int \frac{dz}{z} = -2 \int \frac{\cos x}{\sin x} dx$$

$$\ln z = -2 \ln \sin x + \ln C$$

$$z_h = \frac{C}{\sin^2 x}$$

Variacija konstante:

$$z = C(x)\, \frac{1}{\sin^2 x}$$

$$\frac{1}{2}\Big(C'(x)\frac{1}{\sin^2 x} + C(x)\frac{-2}{\sin^3 x}\cos x\Big) \sin x + C(x)\frac{1}{\sin^2 x}\cos x = \cos x$$

$$C'(x) = 2 \sin x \cos x$$

$$C(x) = 2 \int \sin x \cos x dx = \sin^2 x + C$$

$$z = 1 + \frac{C}{\sin^2 x}$$

$$\boxed{y = \pm\sqrt{1 + \frac{C}{\sin^2 x}}}$$

5. naloga

Karakteristična enačba:

$\lambda^2 + \lambda = 0$

$\lambda_1 = -1\ ,\ \lambda_2 = 0$

$y_h = Ae^{-x} + B$

Partikularna rešitev:

$y_p = Cx^2 + Dx$

$y' = 2Cx + D$

$y'' = 2C$

$2C + 2Cx + D = 2x$

$C = 1\ ,\ D = -2$

Splošna rešitev:

$y = y_h + y_p = Ae^{-x} + B + x^2 - 2x$

$y' = -Ae^{-x} + 2x - 2$

$y'(0) = -3 \quad \to \quad A = 1$

$y(0) = 1 \quad \to \quad B = 0$

$\boxed{y = e^{-x} + x^2 - 2x}$