

# Izpit Matematika II

10. junij 2014

1. Dan je sistem enačb

$$\begin{aligned}x + y + 2z &= 3 \\2x - y + z &= 1 \\3x - 3y &= k\end{aligned}$$

- (a) Določite konstanto  $k$  tako, da je sistem rešljiv.  
(b) Zapišite tisto rešitev, za katero je  $x = 1$ .

2. Dana je ravnina z enačbo  $2x + 3y + z = 6$ .

- (a) Zapišite koordinate točk  $X$  in  $Y$ , ki sta presečišči te ravnine s koordinatnima osema  $x$  in  $y$ .  
(b) Poiščite enačbo ravnine, ki seka dano ravnino pod pravim kotom, presečna premica pa leži v ravnini  $(xy)$ .

3. Integral  $\int_0^1 \frac{\sin x}{x} dx$  računamo s pomočjo razvoja funkcije pod integralom v potenčno

vrsto. Najmanj koliko členov moramo upoštevati, da bo napaka manjša od  $10^{-5}$ ?

4. Rešite diferencialno enačbo

$$y' + 2xy = -6x \quad , \quad y(0) = 2 \quad .$$

5. Rešite sistem diferencialnih enačb za neznanki  $x(t)$  in  $y(t)$ :

$$\begin{aligned}\dot{x} &= x + 2y \\ \dot{y} &= -8x + 11y \\ x(0) &= 1 \\ y(0) &= 1 \quad .\end{aligned}$$

# Rešitve

## 1. naloga

a)

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 1 & 1 \\ 3 & -3 & 0 & k \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -3 & -5 \\ 0 & -6 & -6 & k-9 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -3 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & k+1 \end{bmatrix}$$

$$\boxed{k = -1}$$

b)

$$x = 1 \rightarrow \begin{array}{l} y + 2z = 2 \\ -3y - 3z = -5 \end{array} \rightarrow 3z = 1$$

$$\boxed{z = \frac{1}{3}, y = \frac{4}{3}, x = 1}$$

## 2. naloga

a)

$$\boxed{X(3, 0, 0), Y(0, 2, 0)}$$

b)

$$(\vec{r} - \vec{X}) \cdot (\vec{n} \times \overrightarrow{XY}) = 0$$

$$\begin{vmatrix} x-3 & y & z \\ 2 & 3 & 1 \\ -3 & 2 & 0 \end{vmatrix} = -3y + 4z + 9z - 2x + 6 = 0$$

$$\boxed{2x + 3y - 13z = 6}$$

### 3. naloga

$$\int_0^1 \frac{\sin x}{x} dx = \int_0^1 \frac{1}{x} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} dx =$$

$$\int_0^1 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n-2}}{(2n-1)!} dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!(2n-1)} \Big|_0^1 =$$

$$1 - \frac{1}{3!3} + \frac{1}{5!5} - \frac{1}{7!7} + \frac{1}{9!9} - \dots$$

$$7!7 = 5040 \cdot 7 = 35280 < 10^5$$

$$9!9 = 5040 \cdot 8 \cdot 9^2 > 10^5$$

štirje členi

### 4. naloga

$$\frac{dy}{dx} = -(y+3)2x$$

$$\frac{dy}{y+3} = -2x dx$$

$$\int \frac{dy}{y+3} = \int -2x dx$$

$$\ln(y+3) = -x^2 + \ln C$$

$$y+3 = Ce^{-x^2}$$

$$y = Ce^{-x^2} - 3$$

$$x=0 \rightarrow 2 = C - 3 \rightarrow C = 5$$

$y = 5e^{-x^2} - 3$

## 5. naloga

$$\ddot{x} = \dot{x} + 2(-8x + 11y)$$

$$\ddot{x} = \dot{x} - 16x + 11(\dot{x} - x)$$

$$\ddot{x} - 12\dot{x} + 27x = 0$$

$$\lambda^2 - 12\lambda + 27 = 0$$

$$(\lambda - 3)(\lambda - 9) = 0$$

$$x = Ae^{3t} + Be^{9t}$$

$$y = \frac{1}{2}(\dot{x} - x) = \frac{1}{2}(3Ae^{3t} + 9Be^{9t} - Ae^{3t} - Be^{9t}) = Ae^{3t} + 4Be^{9t}$$

$$t = 0 \rightarrow A + B = 1, A + 4B = 1 \rightarrow A = 1, B = 0$$

$$\boxed{x = e^{3t}, y = e^{3t}}$$