Matematika II (UNI) - Izpit
27.6.2014

1. Dana je tristrana piramida z oglišči $A(1,0,3)$, $B(3,-1,2)$, $C(-1,1,-2)$ in $D(1,1,2)$.
   (a) Izračunajte prostornino piramide.
   (b) Izračunajte ploščino stranske ploskve ABC.
   (c) Izračunajte dolžino višine piramide do oglišča D.

   Rešitev. Iz podatkov izračunamo $\vec{AB} = (2,-1,-1)$, $\vec{AC} = (-2,1,-5)$ in $\vec{AD} = (0,1,-1)$. S pomočjo teh vektorjev izračunamo vse potrebno

$$V = \frac{1}{6}|(\vec{AB},\vec{AC},\vec{AD})| = \frac{1}{6}|\begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -2 & 1 & -5 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}| = \frac{12}{6} = 2,$$

$$S = \frac{1}{2}|\vec{AB}\times\vec{AC}| = \frac{1}{2}|(6,12,0)| = \frac{1}{2}\sqrt{180} = 3\sqrt{5},$$

$$v = \frac{3V}{S} = \frac{2\sqrt{5}}{5}.$$

2. Izračunajte inverz matrike

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 3 \\ -2 & -3 & -3 \end{bmatrix}.$$

   Rešitev. Matriko na desni strani razširimo z identično matriko in z elementarnimi operacijami na vrsticah pridelamo identično matriko na levi.

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & -3 & -3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \overset{(1)}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & -3 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right] \overset{(2)}{\sim}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -3 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -5 & -3 & -3 & 1 & 0 \end{array}\right] \overset{(3)}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -3 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 7 & 1 & 5 \end{array}\right] \overset{(4)}{\sim}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -3 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{7}{2} & \frac{1}{2} & \frac{5}{2} \end{array}\right]$$

   Pri tem smo izvajali naslednje operacije:
   (1) $v_2 \to v_2 - 3v_1$, $v_3 \to v_3 + 2v_1$
   (2) $v_1 \to v_1 - 2v_3$, $v_2 \leftrightarrow v_3$
   (3) $v_3 \to v_3 + 5v_2$
   (4) $v_2 \to v_2 - \frac{1}{2}v_3$, $v_3 \to \frac{v_3}{2}$

   Inverz matrike A je torej

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -3 & 0 & -2 \\ -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \\ \frac{7}{2} & \frac{1}{2} & \frac{5}{2} \end{bmatrix}.$$

Inverz matrike A lahko izračunamo tudi po formuli $A^{-1} = \frac{1}{\det A}\widetilde{A}^T$.

3. Določite konvergenčno območje vrste

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{4^{n-1}(x-3)^n}{\sqrt{n+1}}.$$

Rešitev. Iz vrste razberemo $a_n = \frac{4^{n-1}}{\sqrt{n+1}}$. Konvergenčni radij vrste je

$$R = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n+2}}{4\sqrt{n+1}} = \frac{1}{4}.$$

Če je $x - 3 = \frac{1}{4}$ oziroma $x = \frac{13}{4}$, dobimo posplošeno harmonično vrsto

$$\frac{1}{4}\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}} = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{3^{\frac{1}{2}}} + \frac{1}{4^{\frac{1}{2}}} + \frac{1}{5^{\frac{1}{2}}} + \dots\right),$$

ki je divergentna, saj je $\frac{1}{2} < 1$.

Če je $x - 3 = -\frac{1}{4}$ oziroma $x = \frac{11}{4}$, dobimo alternirajočo vrsto

$$\frac{1}{4}\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}},$$

ki je konvergentna po Leibnitzovem kriteriju, saj njeni členi po absolutni vrednosti padajo proti 0.

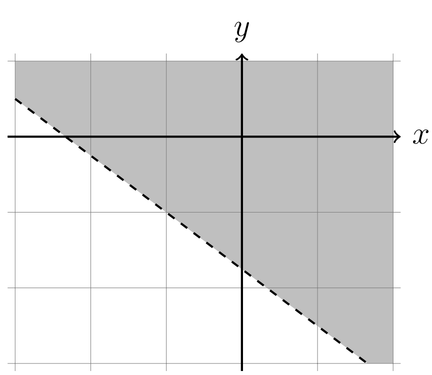
Konvergenčno območje vrste je torej interval $[\frac{11}{4}, \frac{13}{4})$.

4. Dana je funkcija $f(x, y) = \ln(3x + 4y + 7)$.

   (a) Skicirajte definicijsko območje funkcije f.

   (b) Določite vezane ekstreme funkcije f pri pogoju $x^2 + y^2 = 1$.

Rešitev. Definicijsko območje funkcije je $D_f = \{(x, y)\ ;\ y > -\frac{3}{4}x - \frac{7}{4}\}$.



Za izračun vezanih ekstremov sestavimo Lagrangeovo funkcijo

$$F(x, y, \lambda) = \ln(3x + 4y + 7) + \lambda(x^2 + y^2 - 1).$$

Stacionarne točke te funkcije so rešitve sistema

$$\begin{aligned} F_x &= \frac{3}{3x+4y+7} + 2\lambda x = 0, \\ F_y &= \frac{4}{3x+4y+7} + 2\lambda yx = 0, \\ F_\lambda &= x^2 + y^2 - 1 = 0. \end{aligned}$$

Če prvo enačbo pomnožimo z y, drugo pa z x, in ju odštejemo, dobimo $\frac{3y}{3x+4y+7} - \frac{4x}{3x+4y+7} = 0$ oziroma $3y = 4x$. Izrazimo $y = \frac{4}{3}x$ in vstavimo v tretjo enačbo, da dobimo $x^2 = \frac{9}{25}$. Rešitvi te enačbe sta $x_{1,2} = \pm\frac{3}{5}$. Od tod izračunamo še $y_{1,2} = \pm\frac{4}{5}$. Vezana ekstrema sta torej v točkah $T_1(\frac{3}{5}, \frac{4}{5})$ in $T_2(-\frac{3}{5}, -\frac{4}{5})$. Ker je $f(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}) = \ln(12)$ in $f(-\frac{3}{5}, -\frac{4}{5}) = \ln(2)$, je T_1 vezani maksimum, T_2 pa vezani minimum.

5. Rešite diferencialno enačbo

$$(x^3+2)y'' - 3x^2y' = 0$$

pri začetnih pogojih $y(1) = 6$ in $y'(1) = 3$.

Rešitev. Ker v enačbi ne nastopa y, lahko znižamo red z uvedbo nove odvisne spremenljivke $u = y'$. Torej je $y'' = u'$. Dobimo enačbo

$$(x^3+2)u' - 3x^2u = 0,$$

ki ima ločljivi spremenljivki. Enačbo preoblikujemo v

$$\frac{du}{u} = \frac{3x^2}{x^3+2}dx$$

in integriramo, da dobimo

$$\ln u = \int \frac{3x^2}{x^3+2}dx = \ln(x^3+2) + \ln C,$$

pri čemer smo integral na desni izračunali z uvedbo nove spremenljivke $t = x^3+2$. Ko antilogaritmiramo, dobimo $u = C(x^3+2)$, torej je

$$y = \int C(x^3+2)dx = C(\frac{x^4}{4} + 2x) + D.$$

Z upoštevanjem začetnih pogojve izračunamo $C = 1$ in $D = \frac{15}{4}$. Rešitev diferencialne enačbe je torej $y = \frac{x^4}{4} + 2x + \frac{15}{4}$.