Matematika II (UNI) - Izpit
9.9.2014

1. Dani sta premici $\frac{x}{2} = y - 1 = z$ in $x - 1 = \frac{y+1}{3} = \frac{z-2}{-1}$.

   (a) Poiščite presečišče danih premic.

   (b) Določite enačbo ravnine, ki vsebuje obe premici.

   Rešitev.

   (a) Prva premica se v parametrični obliki glasi $x = 2t$, $y = t + 1$, $z = t$, druga premica pa $x = 1 + s$, $y = -1 + 3s$, $z = 2 - s$ (tu moramo nujno uporabiti parameter različen od t). Izenačimo koordinate, da dobimo enačbe za s in t, to so enačbe $2t = 1 + s$, $t + 1 = -1 + 3s$ in $t = 2 - s$. Od tod izračinamo $s = 1$ in $t = 1$. Presečišče premic je torej točka $P(2, 2, 1)$.

   (b) Smerna vektorja premic sta $\vec{e}_1 = (2, 1, 1)$ in $\vec{e}_2 = (1, 3, -1)$. Normala iskane ravnine je vektorski produkt smernih vektorjev premic, t.j. $\vec{n} = (-4, 3, 5)$. Iskana ravnina vsebuje presečišče obeh premic, torej točko P. Od tod lahko zapišemo enačbo ravnine, ki se glasi $-4x + 3y + 5z = 3$.

2. Rešite sistem linearnih enačb

$$\begin{aligned} 2x + y + z + 3w &= 7, \\ x - 2z + w &= 3, \\ x + y + 2z + w &= 2, \\ 3x + 2y - z &= 1. \end{aligned}$$

   Rešitev. Sistem zapišemo v matrični obliki in ga pretvorimo v zgornje trikotno obliko

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 1 & 3 & 7 \\ 1 & 0 & -2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right] \overset{(1)}{\sim} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -2 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & 3 & 7 \\ 3 & 2 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right] \overset{(2)}{\sim} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -4 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -3 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -7 & -3 & -5 \end{array}\right] \overset{(3)}{\sim}$$

$$\overset{(3)}{\sim} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -3 & -3 & -6 \end{array}\right] \overset{(4)}{\sim} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

   Pri tem smo izvajali naslednje operacije:
   (1) $v_1 \leftrightarrow v_3$
   (2) $v_2 \to v_2 - v_1$, $v_3 \to v_3 - 2v_1$, $v_4 \to v_4 - 3v_1$
   (3) $v_3 \to v_3 - v_2$, $v_4 \to v_4 - v_2$
   (4) $v_4 \to v_4 + 3v_3$

   Sistem ima neskončno rešitev z enim parametrom. Sistem rešimo od spodaj navzgor in dobimo $x = 7 - 3w$, $y = -9 + 4w$ in $z = 2 - w$, kjer je w parameter.

3. S pomočjo razvoja v Taylorjevo vrsto okrog točke 0 do vključno četrte potence približno izračunajte integral

$$\int_0^1 \frac{\cos 2x - e^{x^2}}{x^2}\,dx.$$

Rešitev. Vrsta za kosinus se glasi $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots$, torej je

$$\cos 2x = 1 - \frac{(2x)^2}{2!} + \frac{(2x)^4}{4!} - \ldots = 1 - 2x^2 + \frac{2}{3}x^4 - \ldots.$$

Vrsta za eksponentno funkcijo se glasi $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots$, zato je

$$e^{x^2} = 1 + x^2 + \frac{x^4}{2} + \ldots.$$

Od tod poračunamo

$$\frac{\cos 2x - e^{x^2}}{x^2} \doteq \frac{(1 - 2x^2 + \frac{2}{3}x^4) - (1 + x^2 + \frac{x^4}{2})}{x^2} = -3 + \frac{1}{6}x^2.$$

Približna vrednost integrala je

$$\int_0^1 (-3 + \frac{1}{6}x^2)\,dx = -\frac{53}{18}.$$

4. Določite in klasificirajte stacionarne točke funkcije

$$f(x,y) = x^2y - 2xy + y^2.$$

Rešitev. Stacionarne točke funkcije f so rešitve sistema

$$\begin{aligned} f_x &= 2xy - 2y = 0, \\ f_y &= x^2 - 2x + 2y = 0. \end{aligned}$$

V prvi enačbi izpostavimo $2y$, da dobimo $2y(x-1) = 0$. Imamo dve možnosti. Če je $y = 0$, iz druge enačbe dobimo $x = 0$ ali $x = 2$. Če pa je $x = 1$, iz druge enačbe dobimo $y = \frac{1}{2}$. Stacionarne točke so torej $T_1(0,0)$, $T_2(2,0)$ in $T_3(1,\frac{1}{2})$. Klasificiramo jih s pomočjo Hessejeve determinante D. Drugi parcialni odvodi funkcije f so enaki

$$\begin{aligned} f_{xx} &= 2y, \\ f_{xy} &= 2x - 2, \\ f_{yy} &= 2, \end{aligned}$$

Hessejeva determinanta pa $D = 4y - (2x-2)^2$. V točkah $T_1(0,0)$ in $T_2(2,0)$ je $D = -4 < 0$, zato je v teh dveh točkah sedlo. V točki $T_3(1,\frac{1}{2})$ pa je $D = 2 > 0$ in $f_{xx} = 1 > 0$, zato je v tej točki lokalni minimum.

5. Pri kateri vrednosti parametra A je diferencialna enačba

$$\left(2x + Ax^3y^2 + \frac{y}{x^2}\right) dx + \left(6y - x^4y - \frac{1}{x}\right) dy = 0$$

eksaktna? Pri tej vrednosti A rešite enačbo.

Rešitev. Označimo kot običajno $P = 2x + Ax^3y^2 + \frac{y}{x^2}$ in $Q = 6y - x^4y - \frac{1}{x}$. Enačba bo eksaktna takrat, ko bo $P_y = Q_x$, torej $2Ax^3y + \frac{1}{x^2} = -4x^3y + \frac{1}{x^2}$. To se zgodi pri $A = -2$. Iz enačbe $z_x = P$ dobimo

$$z = \int P\ dx = \int (2x - 2x^3y^2 + \frac{y}{x^2})\ dx = x^2 - \frac{x^4y^2}{2} - \frac{y}{x} + C(y).$$

Od tod izračunamo $z_y = -x^4y - \frac{1}{x} + C'(y)$. Iz enačbe $z_y = Q$ sledi $C'(y) = 6y$ oziroma $C(y) = 3y^2 + D$. Rešitve diferencialne enačbe so torej podane z enačbo

$$x^2 - \frac{x^4y^2}{2} - \frac{y}{x} + 3y^2 + D = 0.$$