2. kolokvij iz Matematike 2

2. letnik elektrotehnike (UNI)

29.5.2001

1. Razvij funkcijo $f(x)$ v Taylorjevo vrsto okrog točke $x_0 = 0$:

$$f(x) = ln(x + \sqrt{1 + x^2}).$$

   Namig: binomska vrsta.

2. Poišči in klasificiraj stacionarne točke funkcije

$$f(x, y) = \frac{x^2 + y^2 + 1}{y}.$$

3. Dana je diferencialna enačba:

$$x^2 y' + xy - \frac{1}{x} = 0.$$

   (a) Poišči družino krivulj, ki rešijo enačbo.

   (b) Katera izmed tako dobljenih krivulj poteka skozi točko $T(1, 4)$?

4. Poišči splošno rešitev diferencialne enačbe:

$$y''' - y'' + y' - y = 5x^2.$$

Pravilno rešen kolokvij je vreden 50 točk, ki so po nalogah razporejene takole: 1 - 10 točk, 2 - 15 točk, 3 - 15 točk, 4 - 10 točk.

Čas reševanja kolokvija je 55 minut. Veliko sreče pri reševanju!

Naloga	Točke
1	
2	
3	
4	
Skupaj	

1.naloga: Razvij funkcijo $f(x)$ v Taylorjevo vrsto okrog točke $x_0 = 0$:

$$f(x) = ln(x + \sqrt{1 + x^2}).$$

Rešitev:
Funkcijo odvajamo in odvod razvijemo po binomski formuli:

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\frac{-1}{2}}{n} x^{2n}.$$

Tako dobljeno vrsto členoma integriramo in dobimo Taylorjevo vrsto za $f(x)$:

$$f(x) = C + \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-\frac{1}{2}}{n} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}.$$

Vstavimo $x = 0$ v originalno funkcijo in razvito vrsto in dobimo, da je $C = 0$. Iskana Taylorjeva vrsta je torej:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-\frac{1}{2}}{n} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}.$$

2.naloga: Poišči in klasificiraj stacionarne točke funkcije

$$f(x,y) = \frac{x^2+y^2+1}{y}.$$

Rešitev: Izračunamo oba prva parcialna odvoda funkcije $f(x,y)$:

$$f_x = \frac{2x}{y}, \qquad f_y = \frac{y^2-x^2-1}{y^2}.$$

Ko ju izenačimo z nič, dobimo sistem dveh enačb, katerega rešitve so $x=0$, $y_{1,2}=\pm 1$. Stacionarni točki sta torej $T_1(0,1,f(0,1)) = T_1(0,1,2)$ in $T_2(0,-1,f(0,-1)) = T_2(0,1,-2)$.
Sestavimo Hessejevo matriko drugih parcialnih odvodov:

$$H(x,y) = \begin{bmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{y} & -\frac{2x}{y^2} \\ -\frac{2x}{y^2} & \frac{2x^2y+2y}{y^4} \end{bmatrix}.$$

Izračunamo determinanti Hessejeve matrike za obe stacionarni točki:

$$detH(0,1) = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 4, \qquad detH(0,-1) = \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = 4.$$

Obe determinanti sta večji od nič, zato sta v obeh točkah ekstrema. $f_{xx}(0,1) > 0$, zato je v T_1 minimum, $f_{xx}(0,-1) < 0$, zato je v T_2 maksimum.

3.naloga: Dana je diferencialna enačba:

$$x^2y' + xy - \frac{1}{x} = 0.$$

1. Poišči družino krivulj, ki rešijo enačbo.
2. Katera izmed tako dobljenih krivulj poteka skozi točko $T(1,4)$?

Rešitev:
(a) Rešimo najprej homogeno enačbo, ki ima ločljivi spremenljivki:

$$\begin{aligned} x^2y' + xy &= 0 \\ x^2\frac{dy}{dx} + xy &= 0 \\ \frac{dy}{y} &= -\frac{dx}{x} \\ y &= \frac{C}{x} \end{aligned}$$

Z variacijo konstant rešimo nehomogeno enačbo. Nastavek: $y = \frac{C(x)}{x}$, $y' = \frac{C'x-C}{x^2}$. Dobimo enačbo za C':

$$C' = x^{-2} \qquad \Longrightarrow \qquad C = -x^{-1} + D.$$

Splošna rešitev enačbe je torej:

$$y = -\frac{1}{x^2} + \frac{D}{x}.$$

(b) Zapišemo začetni pogoj: $y(1) = 4$ in ga upoštevamo pri splošni rešitvi: $y(1) = -1 + \frac{D}{1} = 4$. Torej je $D = 5$ in iskana krivulja je

$$y = -\frac{1}{x^2} + \frac{5}{x}.$$

4.naloga: Poišči splošno rešitev diferencialne enačbe:

$$y''' - y'' + y' - y = 5x^2.$$

Rešitev:
Homogena enačba: $y''' - y'' + y' - y = 0$. Nastavek je $y = e^{\lambda x}$, s tem dobimo ustrezno karakteristično enačbo

$$\lambda^3 - \lambda^2 + \lambda - 1 = 0.$$

Ta ima naslednje ničle $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = i$, $\lambda_3 = -i$. Vstavimo jih v nastavek, se znebimo kompleksnih eksponentov in dobimo rešitev homogene enačbe:

$$y_H = C_1 e^x + C_2 \cos x + C_3 \sin x.$$

Nehomogeno enačbo rešimo z naslednjim nastavkom za partikularno rešitev: $y_P = ax^2 + bx + c$, $y' = 2ax + b$, $y'' = 2a$, $y''' = 0$. Vstavimo v enačbo in dobimo: $-2a + 2ax + b - ax^2 - bx - c = 5x^2$. S primerjavo koeficientov pri istih potencah x dobimo sistem treh linearnih enačb za neznanke a, b in c, ki ima rešitev: $a = -5$, $b = -10$, $c = 0$. Partikularna rešitev enačbe je torej

$$y_P = -5x^2 - 10x.$$

Splošna rešitev je vsota homogene in partikularne rešitve:

$$y = -5x^2 - 10x + C_1 e^x + C_2 \cos x + C_3 \sin x.$$