1. kolokvij iz Matematike 2

1. letnik elektrotehnike (UNI)
4.4.2002

1. naloga: Določi realni števili x_1 in x_2, za kateri matrika A ni obrnljiva.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & x+3 & 4 \\ 1+x & 2+x & 3+x \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}.$$

Rešitev 1. naloge: Matrika A ni obrnljiva natanko tedaj, kadar je njena determinanta enaka 0:

$$\det A = 0.$$

To nam da naslednjo enačbo:

$$detA = \begin{vmatrix} 2 & x+3 & 4 \\ 1+x & 2+x & 3+x \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix} = -2x^2 + 4x = -2x(x-2) = 0.$$

Iz tega sledi: $x_1 = 0$, $x_2 = 2$.

2. naloga: Pri kateri vrednosti parametra a se dane tri ravnine sekajo v premici? Izračunaj to premico!

$$\begin{aligned} \Pi_1 &: x + 2y + 3z = a \\ \Pi_2 &: 3z + ay + x = 0 \\ \Pi_3 &: ax + y + 3z = 0 \end{aligned}$$

Rešitev 2. naloge: Po Gaussovi metodi rešimo sistem:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & a \\ 1 & a & 3 & 0 \\ a & 1 & 3 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & a \\ 0 & a-2 & 0 & -a \\ 0 & 1-2a & 3-3a & -a^2 \end{array}\right] \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & a \\ 0 & a-2 & 0 & -a \\ 0 & 0 & 3(a-2)(a-1) & a(a-1)(a+1) \end{array}\right]$$

Da bo presečišče treh ravnin premica, potrebujemo 1-parametrično rešitev sistema. Kandidati za vrednost a, kjer se taka rešitev lahko pojavi, so ničle izrazov v zadnji vrstici, se pravi $a = -1$, $a = 0$, $a = 1$ ali $a = 2$. Za vsako vrednost a preverimo range rezultirajoče matrike sistema in razširjene matrike sistema in ugotovimo, da se 1-parametrična rešitev pojavi le pri $a = 1$:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & a \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Rešimo ta sistem in dobimo parametrično rešitev: $y = 1, x = -1 - 3z$, z pa je parameter. Ta rešitev nam predstavlja iskano premico, ki jo lahko zapišemo še v standardni obliki:

$$\frac{x+1}{-3} = \frac{z}{1}, y = 1.$$

3. naloga: Poišči preostali dve lastni vrednosti matrike A, če veš, da je prva lastna vrednost $\lambda_1 = 1$. Določi lastni vektor, ki pripada največji lastni vrednosti.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 1 & 4 & 1 \\ -2 & -4 & -1 \end{bmatrix}$$

Rešitev 3. naloge: Izračunamo $det(A - \lambda I)$ in dobljeni polinom razstavimo, pri tem, da upoštevamo, da je ena izmed ničel polinoma $\lambda_1 = 1$:

$$det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 2 & 3 \\ 1 & 4-\lambda & 1 \\ -2 & -4 & -1-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 6\lambda^2 - 11\lambda + 6 = -(\lambda - 1)(\lambda - 2)(\lambda - 3).$$

Preostali lastni vrednosti sta torej $\lambda_2 = 2$ in $\lambda_3 = 3$. Lastni vektor, ki pripada največji lastni vrednosti $\lambda_3 = 3$, pa dobimo z rešitvijo homogenega sistema, ki mu pripada matrika $A - \lambda_3 I$:

$$A - \lambda_3 I = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & -4 & -4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & -2 & -2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Zapišemo enačbe za koordinate lastnega vektorja $\vec{x} = (x, y, z)$ in jih rešimo: $x = 0$, $y = -z$, z je parameter. Lastni vektor je torej: $\vec{x} = (0, -1, 1)$.

4. naloga: Poišči matriko, ki pripada linearni preslikavi $A : \mathcal{R}^3 \longrightarrow \mathcal{R}^3$ v standardni bazi prostora $\mathcal{R}^3$. Preslikava A je določena s predpisom: $A\vec{x} = \vec{x} \times (1, -1, 1)$.

Rešitev 4. naloge: Treba je določiti, kam preslika preslikava A vse tri vektorje standardne baze, $\vec{e_1} = (1, 0, 0)$, $\vec{e_2} = (0, 1, 0)$, $\vec{e_3} = (0, 0, 1)$. Rezultirajoči trije vektorji se nato zložijo v matriko preslikave.

$$A\vec{e_1} = \vec{e_1} \times (1, -1, 1) = (1, 0, 0) \times (1, -1, 1) = (0, -1, -1),$$
$$A\vec{e_2} = \vec{e_2} \times (1, -1, 1) = (0, 1, 0) \times (1, -1, 1) = (1, 0, -1),$$
$$A\vec{e_3} = \vec{e_3} \times (1, -1, 1) = (0, 0, 1) \times (1, -1, 1) = (1, 1, 0).$$

Iskana matrika je torej:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$