

1. KOLOKVIJ IZ MATEMATIKE 2

Univerzitetni študij

6. april 2005

1. [10T] Dane so točke $A(4, 1, 2)$, $B(5, 1, 1)$ in $C(5, 2, 2)$. Zapiši enačbo ravnine Π , ki jo določajo točke A , B in C , ter kot, ki ga oklepata vektorja \vec{AB} in \vec{AC} .

Rešitev:

Zapišimo najprej dva vektorja v ravnini.

$$\vec{a} = \vec{AB} = (1, 0, -1)$$

$$\vec{b} = \vec{AC} = (1, 1, 0)$$

Za zapis enačbe ravnine potrebujemo normalni vektor, ki ga dobimo kot vektorski produkt vektorjev \vec{a} in \vec{b} .

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (1, -1, 1)$$

Izračunajmo še koeficient d :

$$d = (1, -1, 1) \cdot (4, 1, 2) = 5.$$

Enačba ravnine se torej glasi:

$$x - y + z = 5.$$

Kot φ med vektorjem \vec{a} in \vec{b} izračunamo s sledečo formulo.

$$\begin{aligned} \cos \varphi &= \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{1}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{1}{2} \\ \Rightarrow \varphi &= \frac{\pi}{3} \end{aligned}$$

2. [10T] Izračunaj rang matrike X , ki je podana z $X = (3A + B^T) \cdot C$.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -4 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Resitev:

$$\begin{aligned} X &= (3A + B^T) \cdot C \\ &= \left(\begin{bmatrix} 6 & -3 \\ -9 & 12 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -4 & 0 \\ 3 & -1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \right) \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & -1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -6 & 11 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & -1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 & 3 \\ -6 & -16 & -1 & -11 \\ 2 & -12 & 9 & -5 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 & 3 \\ -6 & -16 & -1 & -11 \\ 2 & -12 & 9 & -5 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 & 3 \\ 0 & -4 & 2 & -2 \\ 0 & -16 & 8 & -8 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 & 3 \\ 0 & -4 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow r(X) = 2$$

3. [15T] Določi lastne vrednosti matrike A in lastni vektor, ki pripada po absolutni vrednosti najmanjši lastni vrednosti.

$$A = \begin{bmatrix} -6 & 5 & 4 \\ -4 & 3 & 4 \\ -7 & 5 & 5 \end{bmatrix}$$

Rešitev:

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda I) &= \begin{vmatrix} -6 - \lambda & 5 & 4 \\ -4 & 3 - \lambda & 4 \\ -7 & 5 & 5 - \lambda \end{vmatrix} \\ &= -\lambda^3 + 2\lambda^2 + 5\lambda - 6 \\ &= (\lambda + 2)(\lambda - 1)(\lambda - 3) \end{aligned}$$

Lastne vrednosti so torej: $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = 1$ in $\lambda_3 = 3$.

Po absolutni vrednosti najmanjša lastna vrednost je 1.

$$A - I = \begin{bmatrix} -7 & 5 & 4 \\ -4 & 2 & 4 \\ -7 & 5 & 4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & -4 \\ -4 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Lastni vektor, ki pripada lastni vrednosti 1 je torej $\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$.

4. [15T] Kateremu pogoju morajo zadoščati parametri a , b in c , da bo spodnji sistem enačb rešljiv? Reši sistem za vrednosti parametrov $a = -12$, $b = 7$ in $c = -9$.

$$\begin{aligned} 2x - 7y - 7z &= a \\ -x + 2y + 3z &= b \\ x + y - 2z &= c \end{aligned}$$

Rešitev:

$$\begin{aligned} &\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -7 & -7 & a \\ -1 & 2 & 3 & b \\ 1 & 1 & -2 & c \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & c \\ -1 & 2 & 3 & b \\ 2 & -7 & -7 & a \end{array} \right] \\ &\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & c \\ 0 & 3 & 1 & b+c \\ 0 & -9 & -3 & a-2c \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & c \\ 0 & 3 & 1 & b+c \\ 0 & 0 & 0 & a+3b+c \end{array} \right] \end{aligned}$$

Da bo sistem rešljiv, mora biti izpolnjen pogoj $a + 3b + c = 0$.

Dani $a = -12$, $b = 7$ in $c = -9$ temu pogoju zadoščajo, torej ima sistem rešitev. Ker je rang za 1 manjši od števila neznank, dobimo 1-parametrično družino rešitev:

$$\begin{aligned} y &= t, \\ z &= -3t - 2, \\ x &= -7t - 13. \end{aligned}$$