

2. KOLOKVIJ IZ MATEMATIKE 2

Univerzitetni študij

30. maj 2005

1. [10T] S pomočjo razvoja v Taylorjevo vrsto izračunaj limito

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x) - 2 \sin\left(\frac{x}{2}\right)}{1+2x - e^{2x}}.$$

Rešitev:

Uporabimo razvoje naslednjih funkcij okrog točke 0:

$$\begin{aligned}\ln(1+x) &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \pm \dots \\ e^x &= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots \\ \sin(x) &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} \pm \dots\end{aligned}$$

Limita je torej enaka:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x) - 2 \sin\left(\frac{x}{2}\right)}{1+2x - e^{2x}} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \pm \dots - 2\left(\frac{x}{2} - \frac{(\frac{x}{2})^3}{3!} \pm \dots\right)}{1+2x - \left(1 + 2x + \frac{(2x)^2}{2!} + \frac{(2x)^3}{3!} + \dots\right)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots - x + \frac{x^3}{24} + \dots}{1+2x - 1 - 2x - 2x^2 - \frac{4x^3}{3} + \dots} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{x^2}{2} + \frac{3x^3}{8} + \dots}{-2x^2 - \frac{4x^3}{3} + \dots} = \frac{1}{4}\end{aligned}$$

2. [10T] Določi in klasificiraj lokalne ekstreme funkcije

$$f(x, y) = 2x^3 + 2y^3 + 6xy + 27.$$

Rešitev:

Izračunajmo najprej prve parcialne odvode:

$$\begin{aligned}f_x &= 6x^2 + 6y \\ f_y &= 6y^2 + 6x\end{aligned}$$

Stacionarne točke dobimo tam, kjer sta oba prva parcialna odvoda enaka 0. Torej moramo rešiti sistem:

$$\begin{aligned}6x^2 + 6y &= 0 \\ 6y^2 + 6x &= 0\end{aligned}$$

Iz prve enačbe dobimo $y = -x^2$. To vstavimo v drugo enačbo in dobimo $x^4 + x = 0$. To lahko razstavimo in dobimo $x(x+1)(x^2 - x + 1) = 0$. Ta enačba ima dve realni rešitvi, in sicer $x_1 = 0$ in $x_2 = -1$. To nam da $y_1 = 0$ in $y_2 = -1$, kar nam da dve stacionarni točki: $T_1(0, 0)$ in $T_2(-1, -1)$. Izračunamo druge parcialne odvode:

$$f_{xx} = 12x, \quad f_{yy} = 12y, \quad f_{xy} = 6.$$

Torej se Hessejeva matrika funkcije f glasi:

$$Hf = \begin{bmatrix} 12x & 6 \\ 6 & 12y \end{bmatrix}$$

Oglejmo si sedaj determinanto te matrike v obeh stacionarnih točkah.

•

$$\det Hf(0, 0) = \begin{vmatrix} 0 & 6 \\ 6 & 0 \end{vmatrix} = -36 < 0$$

\Rightarrow V točki $T_1(0, 0)$ imamo sedlo.

•

$$\det Hf(-1, -1) = \begin{vmatrix} -12 & 6 \\ 6 & -12 \end{vmatrix} = 108 > 0, \quad f_{xx}(-1, -1) = -12 < 0$$

\Rightarrow V točki $T_2(-1, -1)$ imamo maksimum.

3. [15T] Poišči rešitev začetnega problema

$$\begin{aligned} y'(x) + y(x) \tan(x) + 2y^2(x) \sin(x) &= 0, \\ y(0) &= 1. \end{aligned}$$

Rešitev:

Diferencialna enačba, ki jo moramo rešiti je Bernoullijeva diferencialna enačba. Najprej jo delimo z y^2 , da jo prevedemo v pravilno obliko:

$$y^{-2}y' + y^{-1} \tan(x) + 2 \sin(x) = 0.$$

Sedaj uvedemo novo spremenljivko: $z = y^{-1}$ in $z' = -y^{-2}y'$, da dobimo:

$$-z' + z \tan(x) + 2 \sin(x) = 0,$$

kar je nehomogena linearna diferencialna enačba prvega reda.

• Najprej rešimo homogeni del.

$$\begin{aligned} z' &= z \tan(x) \\ \int \frac{dz}{z} &= \int \tan x dx \\ \ln z &= -\ln |\cos x| + \ln C \\ z &= \frac{C}{\cos x} \end{aligned}$$

Pri tem smo upoštevali, da je $\int \tan x dx = -\ln |\cos x| + C$.

• Nehomogeni del rešimo s pomočjo variacije konstante.

$$\begin{aligned} z(x) &= \frac{C(x)}{\cos x} \\ z'(x) &= \frac{C'(x) \cos x + C(x) \sin x}{\cos^2 x} \end{aligned}$$

Vstavimo v enačbo in dobimo:

$$-\frac{C'(x)}{\cos x} - \frac{C(x)}{\cos x} \tan x + \frac{C(x)}{\cos x} \tan x + 2 \sin x = 0.$$

Sledi:

$$\begin{aligned}C'(x) &= 2 \sin x \cos x = \sin 2x \\C(x) &= \int \sin 2x dx = -\frac{1}{2} \cos 2x + D \\ \Rightarrow z(x) &= \frac{-\frac{1}{2} \cos 2x + D}{\cos x} \\ \Rightarrow y(x) &= \frac{1}{z(x)} = \frac{\cos x}{-\frac{1}{2} \cos 2x + D}\end{aligned}$$

Upoštevamo še začetni pogoj:

$$1 = y(0) = \frac{1}{-\frac{1}{2} + D} \Rightarrow D = \frac{3}{2}.$$

Rešitev začetnega problema se torej glasi:

$$y(x) = \frac{2 \cos x}{3 - \cos 2x}.$$

4. [15T] Poišči rešitev začetnega problema

$$\begin{aligned}y''(x) - 3y'(x) + 2y(x) &= e^{3x} + 5e^x, \\ y(0) &= 4, \\ y'(0) &= \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Rešitev:

Diferencialna enačba, ki jo moramo rešiti je nehomogena linearna diferencialna enačba drugega reda s konstantnimi koeficienti.

- Rešimo najprej homogeni del:

$$y'' - 3y' + 2y = 0.$$

Uporabimo nastavek $y = e^{\lambda x}$ in dobimo karakteristični polinom $\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$. Ta polinom razstavimo in dobimo $(\lambda - 1)(\lambda - 2) = 0$, kar nam da dve rešitvi, in sicer $\lambda_1 = 1$ in $\lambda_2 = 2$. Homogeni del rešitve:

$$y_H = Ae^x + Be^{2x}$$

- Partikularno rešitev poiščemo s pomočjo dveh nastavkov.

Najprej za e^{3x} : nastavek $y_{p1} = Ce^{3x}$, odvajamo in dobimo $y'_{p1} = 3Ce^{3x}$ in $y''_{p1} = 9Ce^{3x}$. To vstavimo v enačbo:

$$9Ce^{3x} - 9Ce^{3x} + 2Ce^{3x} = e^{3x} \Rightarrow C = \frac{1}{2} \Rightarrow y_{p1} = \frac{1}{2}e^{3x}.$$

Nato še za e^x : nastavek $y_{p2} = Dxe^x$, odvajamo in dobimo $y'_{p2} = De^x + Dxe^x$ in $y''_{p2} = 2De^x + Dxe^x$. To vstavimo v enačbo:

$$2De^x + Dxe^x - 3De^x - 3Dxe^x + 2Dxe^x = 5e^x \Rightarrow D = -5 \Rightarrow y_{p2} = -5xe^x.$$

Dobimo:

$$y(x) = y_H + y_{p_1} + y_{p_2} = Ae^x + Be^{2x} + \frac{1}{2}e^{3x} - 5xe^x$$

Iz začetnega pogoja je potrebno izračunati še konstanti A in B . V ta namen odvajamo:

$$y'(x) = Ae^x + 2Be^{2x} + \frac{3}{2}e^{3x} - 5e^x - 5xe^x.$$

Vstavimo začetna pogoja:

$$\begin{aligned} 4 = y(0) &= A + B + \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} = y'(0) &= A + 2B + \frac{3}{2} - 5 \end{aligned}$$

Rešitev tega sistema je: $A = 3$ in $B = \frac{1}{2}$. Rešitev začetnega problema je torej:

$$y(x) = 3e^x + \frac{1}{2}e^{2x} + \frac{1}{2}e^{3x} - 5xe^x.$$