1. KOLOKVIJ IZ MATEMATIKE 2

Univerzitetni študij

3. april 2006

1. [25T] Dana je tristrana piramida, ki je podana z oglišči $A(1,1,1)$, $B(9,4,-1)$, $C(-2,3,4)$ in $D(1,0,2)$. Izračunaj dolžino višine, ki gre skozi oglišče B.
Rešitev:
Označimo vektorje:

$$\begin{aligned}\vec{a} &= \vec{AC} = (-3,2,3)\\ \vec{b} &= \vec{AD} = (0,-1,1)\\ \vec{c} &= \vec{AB} = (8,3,-2)\end{aligned}$$

Volumen tristrane piramide lahko izračunamo na dva načina (po formuli za volumen piramide in iz volumna paralelepipeda):

$$\begin{aligned}V_{pir} &= \frac{1}{3}O\cdot v = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}|\vec{a}\times\vec{b}|\cdot v = \frac{1}{6}|\vec{a}\times\vec{b}|\cdot v,\\ V_{pir} &= \frac{1}{6}V_{par} = \frac{1}{6}|(\vec{a},\vec{b},\vec{c})|.\end{aligned}$$

Ti dve formuli izenačimo in dobimo formulo za višino:

$$v = \frac{|(\vec{a},\vec{b},\vec{c})|}{|\vec{a}\times\vec{b}|}.$$

Izračunajmo najprej vektorski produkt:

$$\vec{a}\times\vec{b} = \begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ -3 & 2 & 3\\ 0 & -1 & 1\end{vmatrix} = (5,3,3).$$

Dolžina tega vektorja je:

$$|\vec{a}\times\vec{b}| = |(5,3,3)| = \sqrt{25+9+9} = \sqrt{43}.$$

Sedaj izračunajmo še mešani produkt:

$$(\vec{a},\vec{b},\vec{c}) = \begin{vmatrix}-3 & 2 & 3\\ 0 & -1 & 1\\ 8 & 3 & -2\end{vmatrix} = -6+16+24+9 = 43.$$

Sedaj lahko izračunamo dolžino višine:

$$v = \frac{|(\vec{a},\vec{b},\vec{c})|}{|\vec{a}\times\vec{b}|} = \frac{43}{\sqrt{43}} = \sqrt{43}.$$

2. [25T] Izračunaj kot med premico

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{1} = \frac{z-3}{1}$$

in ravnino

$$x + 2y - z = 9.$$

Resitev:
Kot med premico in ravnino označimo s φ. Velja: $\varphi = \frac{\pi}{2} - \alpha$, kjer je α kot med smernim vektorjem premice in normalo ravnine. Smerni vektor $\vec{e}$ premice in normalo $\vec{n}$ ravnine preberemo iz enačb premice in ravnine:

$$\begin{aligned} \vec{e} &= (2,1,1) \\ \vec{n} &= (1,2,-1) \end{aligned}$$

Kot α med vektorjem $\vec{e}$ in $\vec{n}$ izračunamo s formulo:

$$\cos\alpha = \frac{\vec{e}\cdot\vec{n}}{|\vec{e}|\cdot|\vec{n}|} = \frac{3}{\sqrt{6}\cdot\sqrt{6}} = \frac{1}{2}.$$

$$\Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{3}$$

$$\Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{6}$$

3. [25T] Izračunaj lastne vrednosti matrike A in lastni vektor, ki pripada po absolutni vrednosti največji lastni vrednosti.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -7 & 3 \\ 2 & -6 & 3 \\ 2 & -8 & 5 \end{bmatrix}$$

Rešitev:
Lastne vrednosti dobimo kot rešitve enačbe $\det(A - \lambda I) = 0$.

$$\begin{aligned} \det(A-\lambda I) &= \begin{vmatrix} 3-\lambda & -7 & 3 \\ 2 & -6-\lambda & 3 \\ 2 & -8 & 5-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (3-\lambda)(-6-\lambda)(5-\lambda) - 42 - 48 + 6(6+\lambda) \\ &\quad +24(3-\lambda) + 14(5-\lambda) \\ &= -\lambda^3 + 2\lambda^2 + \lambda - 2 \\ &= -(\lambda-2)(\lambda-1)(\lambda+1) \end{aligned}$$

Lastne vrednosti so torej: $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 1$ in $\lambda_3 = -1$.
Po absolutni vrednosti največja lastna vrednost je 2. Izračunajmo še pripadajoči lastni vektor:

$$A - 2I = \begin{bmatrix} 1 & -7 & 3 \\ 2 & -8 & 3 \\ 2 & -8 & 3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -7 & 3 \\ 0 & 6 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -7 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Lastni vektor, ki pripada lastni vrednosti 2 je torej $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$.

4. [25T] Analiziraj spodnji sistem enačb glede na parameter a. Če je sistem rešljiv, poišči rešitev.

$$\begin{aligned} ax + 2y - z &= -1 \\ -2x - 4y + 2z &= 2 \\ x + y + z &= -2 \end{aligned}$$

Rešitev:
Izračunajmo najprej rang razširjene matrike koeficientov:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} a & 2 & -1 & -1 \\ -2 & -4 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & -2 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -2 \\ -2 & -4 & 2 & 2 \\ a & 2 & -1 & -1 \end{array}\right]$$
$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 4 & -2 \\ 0 & 2-a & -1-a & -1+2a \end{array}\right]$$
$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 2-a & -1-a & -1+2a \end{array}\right]$$
$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 3-3a & 3a-3 \end{array}\right]$$

Ranga matrike koeficientov in razširjene matrike koeficientov sta vedno enaka. Ko je $a = 1$, je rang $= 2$ in imamo 1-parametrično družino rešitev, ko pa je $a \neq 1$, je rang $= 3$ in imamo natanko eno "rešitev.
V primeru $a = 1$ dobimo 1-parametrično družino rešitev:

$$\begin{aligned} z &= t, \\ y &= 2t + 1, \\ x &= -3t - 3. \end{aligned}$$

V primeru $a \neq 1$ dobimo rešitev:

$$\begin{aligned} z &= -1, \\ y &= -1, \\ x &= 0. \end{aligned}$$