

## 2. KOLOKVIJ IZ MATEMATIKE 2

### Univerzitetni študij

1. junij 2006

1. [25T] Funkcijo

$$f(x) = \frac{3x + 2}{x^2 + 3x + 2}$$

razvij v Taylorjevo vrsto okrog točke  $a = 1$ .

**Rešitev:**

Najprej uvedemo novo spremenljivko  $y = x - 1$  oz.  $x = y + 1$  in zapišemo novo funkcijo

$$g(y) = \frac{3(y + 1) + 2}{(y + 1)^2 + 3(y + 1) + 2} = \frac{3y + 5}{y^2 + 5y + 6}.$$

To funkcijo razvijemo v Taylorjevo vrsto okrog točke  $a = 0$  z uporabo geometrijske vrste:

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1 - x}, \quad |x| < 1.$$

Najprej razbijemo funkcijo na parcialne ulomke:

$$g(y) = \frac{3y + 5}{(y + 2)(y + 3)} = \frac{A}{y + 2} + \frac{B}{y + 3} = \frac{(A + B)y + 3A + 2B}{(y + 2)(y + 3)}.$$

Dobimo sistem enačb:  $A + B = 3$  in  $3A + 2B = 5$ , ki ima rešitev  $A = -1$  in  $B = 4$ . Sledi:

$$\begin{aligned} g(y) &= \frac{-1}{y+2} + \frac{4}{y+3} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 - (-\frac{y}{2})} + \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{1 - (-\frac{y}{3})} \\ &= -\frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{y}{2}\right)^n + \frac{4}{3} \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{y}{3}\right)^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{4}{3^{n+1}} - \frac{1}{2^{n+1}}\right) y^n \end{aligned}$$

Z obratno substitucijo dobimo razvoj funkcije  $f(x)$  v Taylorjevo vrsto okrog točke  $a = 1$ :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{4}{3^{n+1}} - \frac{1}{2^{n+1}}\right) (x - 1)^n.$$

2. [25T] Poišči in klasificiraj lokalne ekstreme funkcije

$$f(x, y) = y^3 + x^2 - 6xy + 3x + 6y + 12.$$

**Rešitev:**

Izračunajmo najprej prve parcialne odvode:

$$\begin{aligned} f_x &= 2x - 6y + 3, \\ f_y &= 3y^2 - 6x + 6. \end{aligned}$$

Stacionarne točke dobimo tam, kjer sta oba prva parcialna odvoda enaka 0. Rešimo sistem:

$$\begin{aligned} 2x - 6y + 3 &= 0, \\ 3y^2 - 6x + 6 &= 0. \end{aligned}$$

Prvo enačbo množimo s 3 in enačbi seštejemo. Po deljenju te enačbe s 3 dobimo kvadratno enačbo:  $y^2 - 6y + 5 = 0$ . To razstavimo in dobimo  $(y - 1)(y - 5) = 0$ . Ta enačba ima dve realni rešitvi, in sicer  $y_1 = 1$  in  $y_2 = 5$ . To nam da  $x_1 = \frac{3}{2}$  in  $x_2 = \frac{27}{2}$ , kar nam da dve stacionarni točki:  $T_1(\frac{3}{2}, 1)$  in  $T_2(\frac{27}{2}, 5)$ . Izračunamo druge parcialne odvode:

$$f_{xx} = 2, \quad f_{yy} = 6y, \quad f_{xy} = -6.$$

Hessejeva matrika funkcije  $f$ :

$$Hf = \begin{bmatrix} 2 & -6 \\ -6 & 6y \end{bmatrix}.$$

Izračunajmo determinanto te matrike v obeh stacionarnih točkah.

•

$$\det Hf\left(\frac{3}{2}, 1\right) = \begin{vmatrix} 2 & -6 \\ -6 & 6 \end{vmatrix} = -24 < 0$$

$\Rightarrow$  V točki  $T_1(\frac{3}{2}, 1)$  imamo sedlo.

•

$$\det Hf\left(\frac{27}{2}, 5\right) = \begin{vmatrix} 2 & -6 \\ -6 & 30 \end{vmatrix} = 24 > 0, \quad f_{xx}\left(\frac{27}{2}, 5\right) = 2 > 0$$

$\Rightarrow$  V točki  $T_2(\frac{27}{2}, 5)$  imamo lokalni minimum.

3. [25T] Poišči rešitev začetnega problema

$$\begin{aligned} y'(x) + \frac{y(x)}{x} &= y^2(x) \ln x, \\ y(1) &= 1. \end{aligned}$$

**Rešitev:**

Diferencialna enačba, ki jo moramo rešiti je Bernoullijeva diferencialna enačba ( $\alpha = 2$ ). Najprej jo delimo z  $y^\alpha = y^2$ , da jo prevedemo v pravilno obliko:

$$y^{-2}y' + \frac{y^{-1}}{x} = \ln x.$$

Sedaj uvedemo novo spremenljivko:  $z = y^{1-\alpha} = y^{-1}$  in  $z' = -y^{-2}y'$ , da dobimo:

$$-z' + \frac{z}{x} = \ln x,$$

kar je nehomogena linearna diferencialna enačba prvega reda.

• Najprej rešimo homogeni del.

$$\begin{aligned} z' &= \frac{z}{x} \\ \int \frac{dz}{z} &= \int \frac{dx}{x} \\ \ln z &= \ln x + \ln C \\ z &= Cx \end{aligned}$$

• Nehomogeni del rešimo s pomočjo variacije konstante.

$$\begin{aligned} z(x) &= C(x)x \\ z'(x) &= C'(x)x + C(x) \end{aligned}$$

Vstavimo v enačbo in dobimo:

$$-C'(x)x - C(x) + \frac{C(x)x}{x} = \ln x.$$

Sledi:

$$\begin{aligned}C'(x) &= -\frac{\ln x}{x} \\C(x) &= -\int \frac{\ln x}{x} dx \\C(x) &= -\frac{1}{2} \ln^2 x + D\end{aligned}$$

Integral izračunamo s pravilom per partes ( $u = \ln x$ ,  $du = \frac{dx}{x}$ ,  $dv = \frac{dx}{x}$ ,  $v = \ln x$ ):

$$I = \int \frac{\ln x}{x} dx = \ln^2 x - \int \frac{\ln x}{x} dx = \ln^2 x - I$$

Torej je:

$$\int \frac{\ln x}{x} dx = \frac{1}{2} \ln^2 x + \text{konst.}$$

Dobili smo rešitev linearne enačbe:

$$z(x) = -\frac{1}{2}x \ln^2 x + Dx.$$

Sledi rešitev Bernoullijeve enačbe:

$$y(x) = \frac{1}{z(x)} = \frac{1}{-\frac{1}{2}x \ln^2 x + Dx}.$$

Upoštevamo še začetni pogoj:

$$1 = y(1) = \frac{1}{-\frac{1}{2} \ln^2 1 + D} \quad \Rightarrow \quad D = 1 \quad (\text{ker je } \ln 1 = 0).$$

Rešitev začetnega problema:

$$y(x) = \frac{1}{-\frac{1}{2}x \ln^2 x + x}.$$

4. [25T] Reši diferencialno enačbo

$$y''(x) + 5y'(x) + 6y(x) = 6e^{3x}.$$

**Rešitev:**

Diferencialna enačba, ki jo moramo rešiti je nehomogena linearna diferencialna enačba drugega reda s konstantnimi koeficienti.

- Rešimo najprej homogeni del:

$$y''(x) + 5y'(x) + 6y(x) = 0.$$

Uporabimo nastavek  $y = e^{\lambda x}$ , ga dvakrat odvajamo, vstavimo vse v enačbo in dobimo karakteristični polinom  $\lambda^2 + 5\lambda + 6 = 0$ . Ta polinom razstavimo in dobimo  $(\lambda + 2)(\lambda + 3) = 0$ , kar nam da dve rešitvi, in sicer  $\lambda_1 = -2$  in  $\lambda_2 = -3$ .

Homogeni del rešitve je tako:

$$y_H = Ae^{-2x} + Be^{-3x}.$$

- Partikularno rešitev dobimo s pomočjo nastavka:  $y_p = Ce^{3x}$ . Odvajamo in dobimo  $y'_p = 3Ce^{3x}$  in  $y''_p = 9Ce^{3x}$ . To vstavimo v enačbo:

$$9Ce^{3x} + 15Ce^{3x} + 6Ce^{3x} = 6e^{3x} \quad \Rightarrow \quad C = \frac{1}{5}.$$

Dobimo partikularno rešitev:

$$y_p = \frac{1}{5}e^{3x}.$$

Rešitev diferencialne enačbe je:

$$y(x) = y_H + y_p = Ae^{-2x} + Be^{-3x} + \frac{1}{5}e^{3x}.$$