1. KOLOKVIJ IZ MATEMATIKE 2

Univerzitetni študij

5. april 2007

1. [$10T$] Določi enačbo ravnine Π, ki gre skozi točko $T(2,3,-1)$ in je pravokotna na ravnini $x+2y-3z=7$ in $-2x-4y+z=-5$. Za koliko je izhodišče koordinatnega sistema oddaljeno od ravnine Π?

   Rešitev:

   Ker je ravnina Π pravokotna na dani ravnini, ležita normali danih ravnin na ravnini Π. Njun vektorski produkt je torej normala ravnine Π.

   $$\begin{aligned} \vec{n}_1 &= (1,2,-3) \\ \vec{n}_2 &= (-2,-4,1) \end{aligned}$$

   Vektorski produkt:

   $$\vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & -3 \\ -2 & -4 & 1 \end{vmatrix} = (-10,5,0).$$

   Enačba iskane ravnine Π: $-10x+5y=-5$, oz. $2x-y=1$.
   Oddaljenost izhodišča:

   $$d(O,\Pi) = \tfrac{|-1|}{\sqrt{4+1}} = \tfrac{\sqrt{5}}{5}.$$

2. [$15T$] Izračunaj lastne vrednosti matrike A in lastni vektor, ki pripada po absolutni vrednosti najmanjši lastni vrednosti.

   $$A = \begin{bmatrix} 0 & -3 & 2 \\ -2 & -1 & 2 \\ 3 & -3 & -1 \end{bmatrix}$$

   Rešitev:

   Lastne vrednosti matrike A dobimo kot rešitve enačbe $\det(A-\lambda I)=0$.

   $$\begin{aligned} \det(A-\lambda I) &= \begin{vmatrix} -\lambda & -3 & 2 \\ -2 & -1-\lambda & 2 \\ 3 & -3 & -1-\lambda \end{vmatrix} \\ &= -(1+\lambda)^2\lambda - 18 + 12 - 6\lambda + 6(1+\lambda) + 6(1+\lambda) \\ &= -\lambda^3 - 2\lambda^2 + 5\lambda + 6 \\ &= -(\lambda-2)(\lambda+1)(\lambda+3) \end{aligned}$$

   Lastne vrednosti: $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = -1$ in $\lambda_3 = -3$.
   Po absolutni vrednosti najmanjša lastna vrednost je -1.
   Pripadajoči lastni vektor:

   $$A+I = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -2 & 0 & 2 \\ 3 & -3 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 0 & -6 & 6 \\ 0 & 6 & -6 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Lastni vektor, ki pripada lastni vrednosti -1: $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

3. [15T] Obravnavaj sistem enačb v odvisnosti od parametra k.

$$\begin{aligned} 6x+4y+7z+8u &= k \\ x+3y+4z+u &= 2 \\ 2x+2y+6z+4u &= -1 \\ 5x+9y+3z+u &= 2k \end{aligned}$$

Rešitev:

Izračunajmo rang razširjene matrike koeficientov:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 4 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 6 & 4 & -1 \\ 5 & 9 & 3 & 1 & 2k \\ 6 & 4 & 7 & 8 & k \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 4 & 1 & 2 \\ 0 & -4 & -2 & 2 & -5 \\ 0 & -6 & -17 & -4 & 2k-10 \\ 0 & -14 & -17 & 2 & k-12 \end{array}\right]$$

$$\sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 4 & 1 & 2 \\ 0 & -4 & -2 & 2 & -5 \\ 0 & 0 & -28 & -14 & 4k-5 \\ 0 & 0 & -20 & -10 & 2k+11 \end{array}\right]$$

$$\sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 4 & 1 & 2 \\ 0 & -4 & -2 & 2 & -5 \\ 0 & 0 & -28 & -14 & 4k-5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -6k+102 \end{array}\right]$$

Sistem ima rešitev, ko je $-6k+102=0$, torej ko je $k=17$. Tedaj sta ranga nerazširjene in razširjene matrike koeficientov enaka 3.
V primeru, ko je $k=17$, dobimo 1-parametrično družino rešitev:

$$\begin{aligned} x &= \tfrac{5}{2}t+\tfrac{19}{2}, \\ y &= -\tfrac{3}{2}t-1, \\ z &= t, \\ u &= -2t-\tfrac{9}{2}. \end{aligned}$$

4. [10T] Določi območje konvergence potenčne vrste

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-3)^n}{\sqrt{3n+2}}.$$

Rešitev:

Konvergenčni radij: ($a_n = \frac{1}{\sqrt{3n+2}}$)

$$R = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty} \sqrt{\frac{3n+5}{3n+2}} = 1$$

Vrsta konvergira na intervalu $(2,4)$. Krajišča intervala:
$x=2$: številska vrsta $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{3n+2}}$ je alternirajoča; ker je zaporedje $a_n = \frac{1}{\sqrt{3n+2}}$ padajoče z limito 0, je ta vrsta konvergentna,
$x=4$: številska vrsta $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{3n+2}}$ je oblike $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^p}$, kjer je $p \leq 1$, torej je divergentna.
Območje konvergence: $[2,4)$.

1. KOLOKVIJ IZ MATEMATIKE 2

Univerzitetni študij

5. april 2007

1. [10T] Določi enačbo ravnine Π, ki gre skozi točko $T(1,-2,3)$ in je pravokotna na ravnini $2x+y-4z=5$ in $x+y-2z=-9$. Za koliko je izhodišče koordinatnega sistema oddaljeno od ravnine Π?

   Rešitev:

   Ker je ravnina Π pravokotna na dani ravnini, ležita normali danih ravnin na ravnini Π. Njun vektorski produkt je torej normala ravnine Π.

$$\begin{aligned}\vec{n}_1 &= (2,1,-4)\\ \vec{n}_2 &= (1,1,-2)\end{aligned}$$

   Vektorski produkt:

$$\vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 1 & -4 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = (2,0,1).$$

   Enačba iskane ravnine Π: $2x+z=5$.
   Oddaljenost izhodišča:

$$d(O,\Pi) = \frac{|-5|}{\sqrt{4+1}} = \sqrt{5}.$$

2. [15T] Izračunaj lastne vrednosti matrike A in lastni vektor, ki pripada po absolutni vrednosti najmanjši lastni vrednosti.

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 3 & -3 \\ -5 & 6 & -3 \\ -5 & 5 & -2 \end{bmatrix}$$

   Rešitev:

   Lastne vrednosti matrike A dobimo kot rešitve enačbe $\det(A-\lambda I)=0$.

$$\begin{aligned}\det(A-\lambda I) &= \begin{vmatrix} -2-\lambda & 3 & -3 \\ -5 & 6-\lambda & -3 \\ -5 & 5 & -2-\lambda \end{vmatrix}\\ &= (-2-\lambda)^2(6-\lambda)+45+75-15(6-\lambda)\\ &\quad +15(-2-\lambda)+15(-2-\lambda)\\ &= -\lambda^3+2\lambda^2+5\lambda-6\\ &= -(\lambda-1)(\lambda+2)(\lambda-3)\end{aligned}$$

   Lastne vrednosti: $\lambda_1=1$, $\lambda_2=-2$ in $\lambda_3=3$.
   Po absolutni vrednosti najmanjša lastna vrednost je 1.
   Pripadajoči lastni vektor:

$$A-I = \begin{bmatrix} -3 & 3 & -3 \\ -5 & 5 & -3 \\ -5 & 5 & -3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Lastni vektor, ki pripada lastni vrednosti 1: $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$.

3. [15T] Obravnavaj sistem enačb v odvisnosti od parametra k.

$$\begin{aligned} 6x+4y+7z+8u &= k \\ x+3y+4z+u &= 3 \\ 2x+2y+6z+4u &= -1 \\ 5x+9y+3z+u &= 2k \end{aligned}$$

Rešitev:

Izračunajmo rang razširjene matrike koeficientov:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 4 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 6 & 4 & -1 \\ 5 & 9 & 3 & 1 & 2k \\ 6 & 4 & 7 & 8 & k \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 4 & 1 & 3 \\ 0 & -4 & -2 & 2 & -7 \\ 0 & -6 & -17 & -4 & 2k-15 \\ 0 & -14 & -17 & 2 & k-18 \end{array}\right]$$

$$\sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 4 & 1 & 3 \\ 0 & -4 & -2 & 2 & -7 \\ 0 & 0 & -28 & -14 & 4k-9 \\ 0 & 0 & -20 & -10 & 2k+13 \end{array}\right]$$

$$\sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 4 & 1 & 3 \\ 0 & -4 & -2 & 2 & -7 \\ 0 & 0 & -28 & -14 & 4k-9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -6k+136 \end{array}\right]$$

Sistem ima rešitev, ko je $-6k+136=0$, torej ko je $k=\frac{68}{3}$. Tedaj sta ranga nerazširjene in razširjene matrike koeficientov enaka 3.
V primeru, ko je $k=\frac{68}{3}$, dobimo 1-parametrično družino rešitev:

$$\begin{aligned} x &= \tfrac{5}{2}t+\tfrac{89}{6}, \\ y &= -\tfrac{3}{2}t-2, \\ z &= t, \\ u &= -2t-\tfrac{35}{6}. \end{aligned}$$

4. [10T] Določi območje konvergence potenčne vrste

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{\sqrt{4n+1}}.$$

Rešitev:

Konvergenčni radij: ($a_n = \frac{1}{\sqrt{4n+1}}$)

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{4n+5}{4n+1}} = 1$$

Vrsta konvergira na intervalu $(1,3)$. Krajišča intervala:
$x=1$: številska vrsta $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{4n+1}}$ je alternirajoča; ker je zaporedje $a_n=\frac{1}{\sqrt{4n+1}}$ padajoče z limito 0, je ta vrsta konvergentna,
$x=3$: številska vrsta $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{4n+1}}$ je oblike $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n^p}$, kjer je $p\le 1$, torej je divergentna.
Območje konvergence: $[1,3)$.