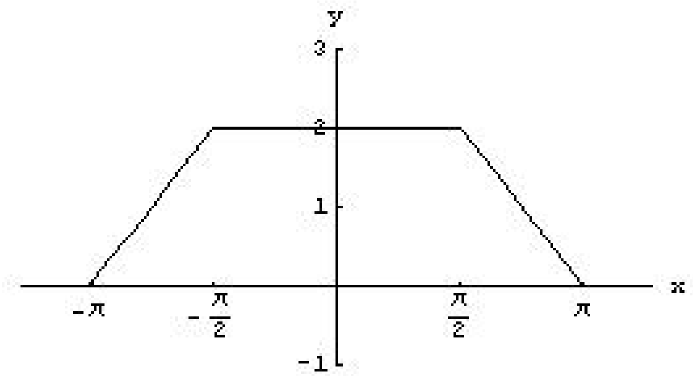
2. KOLOKVIJ IZ MATEMATIKE 2

Univerzitetni študij

31. maj 2007

1. [15T] Razvij funkcijo $f(x)$, katere graf je podan na spodnji sliki, v Fourierovo vrsto na intervalu $[-\pi, \pi]$.



Rešitev:
Ker je dana funkcija $f(x)$ soda, so koeficienti $b_n = 0$.
Funkcijski predpis na intervalu $[0, \pi]$:

$$f(x) = \begin{cases} 2, & 0 \leq x < \frac{\pi}{2}, \\ -\frac{4}{\pi}x + 4, & \frac{\pi}{2} \leq x \leq \pi. \end{cases}$$

Koeficient a_0:

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi f(x)dx = \frac{3}{2}.$$

Koeficienti a_n:

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(x) \cos(nx) dx \\ &= \frac{2}{\pi} \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\cos(nx)dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^\pi \left(-\frac{4}{\pi}x + 4 \right) \cos(nx)dx \right) \\ &= \frac{8}{n^2\pi^2} \left(\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) - (-1)^n \right) \end{aligned}$$

Pri računanju drugega integrala uporabimo formulo per partes za $u = -\frac{4}{\pi}x + 4$ in $dv = \cos(nx)dx$, torej je $du = -\frac{4}{\pi}dx$ in $v = \frac{1}{n}\sin(nx)$.
Fourierova vrsta:

$$f(x) = \frac{3}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{8}{n^2\pi^2}\left(\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) - (-1)^n\right)\cos(nx).$$

2. [10T] Poišči največjo in najmanjšo vrednost funkcije

$$f(x,y) = x^2 + 2y^2$$

na krivulji z enačbo $4x^2 + y^2 = 25$.

Rešitev:
Nalogo rešujemo z vezanimi ekstremi. Sestavimo funkcijo:

$$F(x,y,\lambda) = x^2 + 2y^2 + \lambda(4x^2 + y^2 - 25)$$

in jo odvajamo po vseh treh spremenljivkah:

$$\begin{aligned} F_x &= 2x + 8\lambda x, \\ F_y &= 4y + 2\lambda y, \\ F_\lambda &= 4x^2 + y^2 - 25. \end{aligned}$$

Stacionarne točke dobimo tam, kjer so vsi prvi parcialni odvodi enaki 0. Rešujemo sistem:

$$\begin{aligned} 2x + 8\lambda x &= 0, \\ 4y + 2\lambda y &= 0, \\ 4x^2 + y^2 - 25 &= 0. \end{aligned}$$

Iz prve enačbe dobimo $x(1+4\lambda) = 0$, iz druge pa $y(2+\lambda) = 0$. Ker x in y ne moreta biti hkrati enaka 0, dobimo dve rešitvi: $x = 0$, $\lambda = -2$ in $y = 0$, $\lambda = -\frac{1}{4}$. Iz zadnje enačbe dobimo za $x = 0$, da je $y = \pm 5$, za $y = 0$ pa, da je $x = \pm\frac{5}{2}$. Stacionarne točke: $T_1(0,5)$, $T_2(0,-5)$, $T_3(\frac{5}{2},0)$ in $T_4(-\frac{5}{2},0)$.
Ker je $f(0,5) = f(0,-5) = 50$ in $f(\frac{5}{2},0) = f(-\frac{5}{2},0) = \frac{25}{4}$, imamo v točkah T_1 in T_2 največjo vrednost, v točkah T_3 in T_4 pa najmanjšo vrednost funkcije na dani krivulji.

3. [15T] Reši diferencialno enačbo

$$y' + y = \mathrm{e}^{\frac{2}{3}x}y^{\frac{2}{3}}.$$

Rešitev:
To je Bernoullijeva diferencialna enačba. Najprej jo delimo z $y^{\frac{2}{3}}$:

$$y^{-\frac{2}{3}}y' + y^{\frac{1}{3}} = \mathrm{e}^{\frac{2}{3}x}.$$

Uvedemo novo spremenljivko $u = y^{\frac{1}{3}}$ in $u' = \frac{1}{3}y^{-\frac{2}{3}}y'$ in dobimo:

$$3u' + u = \mathrm{e}^{\frac{2}{3}x},$$

kar je nehomogena linearna diferencialna enačba prvega reda.

(i) Homogeni del.

$$\begin{aligned} 3u' + u &= 0 \\ \int \frac{du}{u} &= -\frac{1}{3}\int dx \\ \ln u &= -\frac{1}{3}x + \ln C \\ u_H &= C\mathrm{e}^{-\frac{1}{3}x} \end{aligned}$$

(ii) Nehomogeni del rešimo z variacijo konstante.

$$\begin{aligned} u &= C(x)\mathrm{e}^{-\frac{1}{3}x} \\ u' &= C'(x)\mathrm{e}^{-\frac{1}{3}x} - \frac{1}{3}C(x)\mathrm{e}^{-\frac{1}{3}x} \end{aligned}$$

Vstavimo v enačbo in dobimo:

$$3C'(x)\mathrm{e}^{-\frac{1}{3}x} - C(x)\mathrm{e}^{-\frac{1}{3}x} + C(x)\mathrm{e}^{-\frac{1}{3}x} = \mathrm{e}^{\frac{2}{3}x}.$$

Sledi:

$$\begin{aligned} 3C'(x)\mathrm{e}^{-\frac{1}{3}x} &= \mathrm{e}^{\frac{2}{3}x} \\ C'(x) &= \frac{1}{3}\mathrm{e}^{x} \\ C(x) &= \int \frac{1}{3}\mathrm{e}^{x}dx \\ C(x) &= \frac{1}{3}\mathrm{e}^{x} \end{aligned}$$

Partikularna rešitev:

$$\Rightarrow u_p = \frac{1}{3}\mathrm{e}^{\frac{2}{3}x}$$

Splošna rešitev:

$$u(x) = u_p + u_H = \frac{1}{3}\mathrm{e}^{\frac{2}{3}x} + C\mathrm{e}^{-\frac{1}{3}x}.$$

Obratna substitucija, da dobimo rešitev za y:

$$y(x) = \left(\frac{1}{3}\mathrm{e}^{\frac{2}{3}x} + C\mathrm{e}^{-\frac{1}{3}x}\right)^3.$$

4. [10T] Reši diferencialno enačbo

$$y'' - 4y' + 3y = 5\mathrm{e}^{2x}.$$

Rešitev:
To je nehomogena linearna diferencialna enačba drugega reda s konstantnimi koeficienti.

(i) Homogeni del:

$$y'' - 4y' + 3y = 0.$$

Uporabimo nastavek $y = \mathrm{e}^{\lambda x}$ in dobimo karakteristični polinom $\lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0$. Ta polinom razstavimo in dobimo $(\lambda - 1)(\lambda - 3) = 0$, kar nam da dve rešitvi, in sicer $\lambda_1 = 1$ in $\lambda_2 = 3$.

$$\Rightarrow y_H = A\mathrm{e}^{x} + B\mathrm{e}^{3x}$$

(ii) Partikularno rešitev dobimo s pomočjo nastavka $y_p = C\mathrm{e}^{2x}$. Odvajamo in dobimo $y_p' = 2C\mathrm{e}^{2x}$ in $y_p'' = 4C\mathrm{e}^{2x}$. To vstavimo v enačbo:

$$4C\mathrm{e}^{2x} - 8C\mathrm{e}^{2x} + 3C\mathrm{e}^{2x} = 5\mathrm{e}^{2x}$$

$$\Rightarrow C = -5$$

$$\Rightarrow y_p = -5\mathrm{e}^{2x}$$

Splošna rešitev:

$$y(x) = y_p + y_H = -5\mathrm{e}^{2x} + A\mathrm{e}^{x} + B\mathrm{e}^{3x}.$$