Matematika II (UNI) 1. kolokvij (10. april 2008)

REŠITVE

Naloga 1 (25 točk)

Dani so trije vektorji v vektorskem prostoru $\mathbb{R}^3$, to so $\vec{a} = (q, 1, 2)$, $\vec{b} = (0, q, -1)$ in $\vec{c} = (2, 3, q-1)$, ter točka $T(3, 3, 2)$.

a.) Določite vrednost parametra q, tako da bodo vektorji $\vec{a}$, $\vec{b}$ in $\vec{c}$ komplanarni.

b.) Naj bo $q = 3$. Izračunajte prostornino paralelepipeda, ki ga določajo vektorji $\vec{a}, \vec{b}$ in $\vec{c}$.

c.) Naj bo $q = 1$. Zapišite enačbo ravnine Π, ki vsebuje vektorja $\vec{a}$ in $\vec{b}$ ter točko T.

d.) Zapišite enačbo vsaj ene premice, ki ravnino $\Pi : x - 2y = -3$ prebada v točki T.

a.) Vektoji so komplanarni, ko je njihov mešani produkt enak 0*:*

$$\begin{vmatrix} q & 1 & 2 \\ 0 & q & -1 \\ 2 & 3 & q-1 \end{vmatrix} = q^3 - q^2 - q - 2 = (q-2)(q^2 + q + 1) = 0.$$

Edino ničlo ($q = 2$) zgornjega polinoma 3. stopnje najdemo s Hornerjevim algoritmom, polinom $q^2 + q + 1$ pa v realnem ni razcepen. Torej, vektorji $\vec{a}$, $\vec{b}$ in $\vec{c}$ so komplanarni pri $q = 2$.

b.) Prostornina paralelepipeda je enaka absolutni vrednosti mešanega produkta vektorjev $\vec{a}$, $\vec{b}$ in $\vec{c}$ ($q = 3$):

$$\left| \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & -1 \\ 2 & 3 & 2 \end{vmatrix} \right| = 13.$$

c.) Normalo ravnine Π dobimo, tako da vektorja $\vec{a}$ in $\vec{b}$ vektorsko pomnožimo:

$$\vec{n} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = (-3, 1, 1).$$

Splošno enačbo ravnine Π sedaj dobimo takole:

$$-3x + y + z = d, \ \textit{kjer je} \ d = \vec{n} \cdot \vec{r_T} = (-3, 1, 1) \cdot (3, 3, 2) = -4.$$

Enačba ravnine Π*:* $-3x + y + z = -4$.

d.) V točki T prebada ravnino Π cel šop premic (neskončno mnogo). Ena izmed njih je premica, katere smerni vektor je enak normali $\vec{s} = \vec{n} = (1, -2, 0)$, tj. premica, ki je pravokotna na ravnino:

$$x - 3 = \frac{y-3}{-2},\ z = 2.$$

Naloga 2 (25 točk)

Poiščite matriko X, ki zadošča enačbi $XA = B$, kjer sta $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ in $B = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

Matrično enačbo $XA = B$ lahko z desne pomnožimo z inverzom matrike A in dobimo

$$X = BA^{-1}.$$

Sedaj z Gaussovo eliminacijo izračunamo inverzno matriko A^{-1} in do rezultata nas loči še eno matrično množenje.

Naloge se lahko lotimo tudi tako, da enačbo $XA = B$ transponiramo in dobimo

$$A^T X^T = B^T.$$

Do rezultata X sedaj pridemo, tako da razširjeno matriko $[A^T|B^T]$ z operacijami, ki ohranjajo rang, transformiramo tako dolgo, da dobimo $[I|X^T]$, kjer je I enotska matrika z enicami na diagonali in ničlami izven diagonale.

$$\left[\begin{array}{rrr|rrr} 0 & -1 & 1 & 3 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right] \equiv \left[\begin{array}{rrr|rrr} -1 & 1 & 0 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right] \quad \textit{zamenjamo 1. in 2. vrstico}$$

$$\equiv \left[\begin{array}{rrr|rrr} -1 & 1 & 0 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & 3 & 2 \end{array}\right] \equiv \left[\begin{array}{rrr|rrr} -1 & 1 & 0 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 7 & 5 & 3 \end{array}\right] \quad \frac{1.vr. + 3.vr.}{2.vr. + 3.vr.}$$

$$\equiv \left[\begin{array}{rrr|rrr} -1 & 1 & 0 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -4 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 7 & 5 & 3 \end{array}\right] \quad 2.vr. - 3.vr.$$

$$\equiv \left[\begin{array}{rrr|rrr} -1 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & -4 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 7 & 5 & 3 \end{array}\right] \quad 1.vr. + 2.vr.$$

$$\equiv \left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 7 & 5 & 3 \end{array}\right] \quad \begin{array}{l} (-1) \times 1.vr. \\ (-1) \times 2.vr. \end{array}$$

Na desni strani smo dobili matriko X^T, ki jo moramo še transponirati (zamenjati vrstice in stolpce), da dobimo rezultat

$$X = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 1 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

Naloga 3 (25 točk)

Dana je preslikava $\tau : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ s predpisom

$$\tau(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} x \\ 0 \\ z \end{bmatrix}.$$

a.) Določite matriko preslikave τ v standardni bazi.

b.) Določite sliko vektorja $\vec{e} = [10, 4, 2008]^T$.

c.) Poiščite vse vektorje, ki jih τ preslika v vektor $\vec{f} = [-1, 0, 6]^T$.

a.) Matrika preslikave τ v standardni bazi ima za stolpce slike standardnih baznih vektorjev $\vec{i} = [1, 0, 0]^T$, $\vec{j} = [0, 1, 0]^T$ in $\vec{k} = [0, 0, 1]^T$. Ker so

$$\tau(\vec{i}) = \tau(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \tau(\vec{j}) = \tau(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \tau(\vec{k}) = \tau(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

je matrika preslikave τ v standardni bazi enaka

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

b.) Sliko vektorja $\vec{e} = [10, 4, 2008]^T$ dobimo iz predpisa kot

$$\tau(\vec{e}) = \tau(\begin{bmatrix} 10 \\ 4 \\ 2008 \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} 10 \\ 0 \\ 2008 \end{bmatrix}$$

ali pa tako, da matriko T pomnožimo z vektorjem $\vec{e}$.

c.) Vsi vektorji, ki jih τ preslika v vektor $\vec{f} = [-1, 0, 6]^T$, so vektorji oblike

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} -1 \\ x \\ 6 \end{bmatrix}, \text{ kjer je } x \text{ poljubno realno število.}$$

Do tega rezultata lahko pridemo tudi tako, da rešimo sistem linearnih enačb $T\vec{x} = \vec{f}$. Dobimo 1-parametrično rešitev s poljubno 2. komponento.

Naloga 4 (25 točk)

Določite konvergenčni polmer potenčne vrste

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+3)^3}{3^n}(x+3)^n$$

in izračunajte vsoto vrste pri $x = -3$. Ali vrsta konvergira pri $x = 1$?

Najprej izračunamo konvergenčni polmer potenčne vrste:

$$R = \lim_{n\to\infty} |\frac{a_n}{a_{n+1}}| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{\frac{(n+3)^3}{3^n}}{\frac{(n+4)^3}{3^{n+1}}} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{3(n+3)^3}{(n+4)^3} = \lim_{n\to\infty} \frac{3n^3 + \dots}{n^3 + \dots} = 3.$$

Ker je središče vrste enako $a = -3$, sedaj vemo, da vrsta konvergira za $x \in (-6, 0)$ ter divergira za $x < -6$ in $x > 0$.

Izračunajmo še vsoto vrste pri $x = -3$ (ki leži v območju konvergence):

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+3)^3}{3^n}(x+3)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+3)^3}{3^n} 0^n = \frac{(0+3)^3}{3^0} 0^0 + 0 + \dots = 27.$$

Pri $x = 1$ vrsta ne konvergira (torej divergira), saj ta vrednost ne leži v konvergenčnem območju $(-6, 0)$.