REŠITVE

Naloga 1

Razvijte funkcijo $f(x) = \frac{2x}{x^2-x-6}$ v Taylorjevo vrsto v okolici točke $a = 2$ in določite območje konvergence.

Racionalno funkcijo $f(x)$ najprej razdelimo na parcialne ulomke:

$$\frac{2x}{x^2-x-6} = \frac{2x}{(x+2)(x-3)} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{x-3} = \frac{A(x-3)+B(x+2)}{(x+2)(x-3)}.$$

Konstanti A in B določimo, tako da izenačimo oba števca:

$$2x = A(x-3) + B(x+2).$$

Dva polinoma sta enaka, če imata enake koeficiente:

$$\begin{aligned} x^1 : \ 2 &= A + B \\ x^0 : \ 0 &= -3A + 2B \end{aligned}$$

Rešitev sistema sta $A = \frac{4}{5}$ in $B = \frac{6}{5}$. Torej

$$f(x) = \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{x+2} + \frac{6}{5} \cdot \frac{1}{x-3}.$$

Pri razvoju funkcije $f(x)$ v Taylorjevo vrsto si lahko pomagamo z geometrijsko vrsto

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n,$$

ki konvergira za $|x| < 1$. Ker iščemo razvoj funkcije $f(x)$ v Taylorjevo vrsto v okolici točke $a = 2$, tj. potenčno vrsto oblike

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-2)^n,$$

moramo pred uporabo geometrijske vrste zapis funkcije $f(x)$ nekoliko preoblikovati:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{x+2} + \frac{6}{5} \cdot \frac{1}{x-3} \\ &= \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{(x-2)+4} + \frac{6}{5} \cdot \frac{1}{(x-2)-1} \\ &= \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{4(1+\frac{x-2}{4})} + \frac{6}{5} \cdot \frac{1}{-1(1-(x-2))} \\ &= \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{1-(-\frac{x-2}{4})} - \frac{6}{5} \cdot \frac{1}{1-(x-2)}. \end{aligned}$$

Na tem mestu lahko uporabimo geometrijsko vrsto:

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{1-(-\frac{x-2}{4})}-\frac{6}{5}\cdot\frac{1}{1-(x-2)} \\
&= \frac{1}{5}\sum_{n=0}^{\infty}(-\frac{x-2}{4})^n-\frac{6}{5}\sum_{n=0}^{\infty}(x-2)^n \\
&= \frac{1}{5}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(x-2)^n}{4^n}-\frac{6}{5}\sum_{n=0}^{\infty}(x-2)^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{5}(-1)^n\frac{(x-2)^n}{4^n}-\frac{6}{5}(x-2)^n\right) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\left((-1)^n\frac{1}{5\cdot 4^n}-\frac{6}{5}\right)(x-2)^n.
\end{aligned}
$$

Določimo še območje konvergence dobljene Taylorjeve vrste. Iz obeh uporab geometrijske vrste sledi:

$$
\begin{aligned}
|-\frac{x-2}{4}| &< 1 \implies |x-2|<4 \implies x\in(-2,6), \\
|x-2| &< 1 \implies x\in(1,3).
\end{aligned}
$$

Območje konvergence je presek obeh intervalov, tj. $(1,3)$ *oz.* $|x-2|<1$.

Naloga 2

Poiščite premico $y = kx + n$, za katero je vsota kvadratov vertikalnih odmikov od točk $A(0,0)$, $B(1,2)$ in $C(-3,3)$ minimalna.

Najprej zapišimo funkcijo, ki izračuna vsoto kvadratov vertikalnih odmikov točk A, B *in* C *od premice* $y = kx + n$:

$$
\begin{aligned}
f(k,n) &= (kx_A+n-y_A)^2+(kx_B+n-y_B)^2+(kx_C+n-y_C)^2 \\
&= (k\cdot 0+n-0)^2+(k\cdot 1+n-2)^2+(k\cdot(-3)+n-3)^2 \\
&= n^2+(k+n-2)^2+(-3k+n-3)^2.
\end{aligned}
$$

Ker je funkcija $f(k,n)$ *povsod odvedljiva in povsod definirana, so edini kandidati za oba (globalna) ekstrema (najmanjšo in največjo vsoto kvadratov vertikalnih odmikov) stacionarne točke funkcije* $f(k,n)$:

$$
\begin{aligned}
f'_k &= 2(k+n-2)+2(-3k+n-3)\cdot(-3) = 20k-4n+14=0, \\
f'_n &= 2n+2(k+n-2)+2(-3k+n-3) = -4k+6n-10=0.
\end{aligned}
$$

Rešitev zgornjega sistema sta $k=-\frac{11}{26}$ *in* $n=\frac{18}{13}$. *Dobili smo eno samo stacionarno točko*

$$T(-\frac{11}{26},\frac{18}{13}).$$

Ker ne obstaja takšna premica, za katero bi imela funkcija $f(k,n)$, ki je neomejena, maksimalno vrednost, in nasprotno, ker zagotovo obstaja premica, ki se danim točkam najlepše prilega (funkcija $f(k,n)$ doseže globalni minimum), je iskana premica premica

$$y = -\frac{11}{26}x + \frac{18}{13},$$

ki jo določa točka $T(-\frac{11}{26}, \frac{18}{13})$.

Naloga 3

Poiščite rešitev začetnega problema:

$$\begin{aligned} y' &= \frac{e^y}{2x+3}, \\ y(-\frac{1}{2}) &= 2. \end{aligned}$$

Dana diferencialna enačba ima ločljive spremenljivke. Diferencialne enačbe z ločljivima spremenljivkama rešujemo tako, da namesto y' v enačbo vstavimo $\frac{dy}{dx}$, ločimo spremenljivki in integriramo:

$$\begin{aligned} y' &= e^y \frac{1}{2x+3}, \\ \frac{dy}{dx} &= e^y \frac{1}{2x+3}, \\ dy &= e^y \frac{1}{2x+3} dx, \\ e^{-y} dy &= \frac{1}{2x+3} dx, \\ \int e^{-y} dy &= \int \frac{1}{2x+3} dx, \\ -e^{-y} &= \frac{1}{2} \int \frac{1}{x+\frac{3}{2}} dx, \\ -e^{-y} &= \frac{1}{2} \ln(x+\frac{3}{2}) + \ln C, \\ -e^{-y} &= \ln(x+\frac{3}{2})^{\frac{1}{2}} + \ln C, \\ -e^{-y} &= \ln(C(x+\frac{3}{2})^{\frac{1}{2}}), \\ e^{-y} &= -\ln(C(x+\frac{3}{2})^{\frac{1}{2}}), \\ -y &= \ln(-\ln C(x+\frac{3}{2})^{\frac{1}{2}}), \\ -y &= \ln\ln(C^{-1}(x+\frac{3}{2})^{-\frac{1}{2}}), \\ y &= -\ln\ln \frac{D}{\sqrt{x+\frac{3}{2}}}. \end{aligned}$$

Rešimo še začetni problem, tj. v splošno rešitev vstavimo začetni pogoj $y(-\frac{1}{2}) = 2$:

$$\begin{aligned}
2 &= -\ln\ln\frac{D}{\sqrt{-\frac{1}{2}+\frac{3}{2}}},\\
2 &= -\ln\ln D,\\
-2 &= \ln\ln D,\\
\ln D &= e^{-2},\\
D &= e^{e^{-2}}.
\end{aligned}$$

Sledi rešitev začetnega problema:

$$y = -\ln\ln\frac{e^{e^{-2}}}{\sqrt{x+\frac{3}{2}}} = -\ln\left(e^{-2} - \frac{1}{2}\ln\left(x+\frac{3}{2}\right)\right).$$

Naloga 4

Poiščite splošno rešitev diferencialne enačbe

$$4y''' + 4y'' + 5y' = 1 + e^{\frac{x}{2}}.$$

Dana diferencialna enačba je linearna s konstantnimi koeficienti. Splošna rešitev je sestavljena iz rešitve homogenega dela (y_h) in partikularne rešitve (y_p):

$$y = y_h + y_p.$$

a.) Homogeni del (računamo y_h):

$$4y''' + 4y'' + 5y' = 0.$$

Vzamemo nastavek $y_h = e^{\lambda}$ in dobimo karakteristično enačbo:

$$\begin{aligned}
4\lambda^3 + 4\lambda^2 + 5\lambda &= 0,\\
\lambda(4\lambda^2 + 4\lambda + 5) &= 0,
\end{aligned}$$

katere rešitve so:

$$\begin{aligned}
\lambda_1 &= 0,\\
\lambda_2 &= -\frac{1}{2} + i,\\
\lambda_3 &= -\frac{1}{2} - i.
\end{aligned}$$

Sledi rešitev homogenega dela:

$$\begin{aligned}
y_h &= Ae^{\lambda_1 x} + Be^{\lambda_2 x} + Ce^{\lambda_3 x} \\
&= A + Be^{(-\frac{1}{2}+i)x} + Ce^{(-\frac{1}{2}-i)x} \\
&= A + Be^{-\frac{1}{2}x}e^{ix} + Ce^{-\frac{1}{2}x}e^{-ix} \\
&= A + Be^{-\frac{1}{2}x}(\cos x + i\sin x) + Ce^{-\frac{1}{2}x}(\cos x - i\sin x) \\
&= A + (B+C)e^{-\frac{1}{2}x}\cos x + (Bi - Ci)e^{-\frac{1}{2}x}\sin x \\
&= A + De^{-\frac{1}{2}x}\cos x + Ee^{-\frac{1}{2}x}\sin x.
\end{aligned}$$

b.) Nehomogeni del (računamo y_p):

$$4y''' + 4y'' + 5y' = 1 + e^{\frac{x}{2}}.$$

Nastavek za partikularno rešitev je sestavljen iz polinomskega nastavka (zaradi 1) in iz eksponencialnega nastavka (zaradi $e^{\frac{x}{2}}$):

$$y_p = Fx + He^{\frac{x}{2}}.$$

Nastavek 3-krat odvajamo in vstavimo v diferencialno enačbo:

$$\begin{aligned}
y &= Fx + He^{\frac{x}{2}}, \\
y' &= F + \frac{H}{2}e^{\frac{x}{2}}, \\
y'' &= \frac{H}{4}e^{\frac{x}{2}}, \\
y''' &= \frac{H}{8}e^{\frac{x}{2}},
\end{aligned}$$

$$4\cdot\frac{H}{8}e^{\frac{x}{2}} + 4\cdot\frac{H}{4}e^{\frac{x}{2}} + 5(F + \frac{H}{2}e^{\frac{x}{2}}) = 1 + e^{\frac{x}{2}},$$
$$\frac{H}{2}e^{\frac{x}{2}} + He^{\frac{x}{2}} + 5F + \frac{5H}{2}e^{\frac{x}{2}} = 1 + e^{\frac{x}{2}}.$$

Sledi sistem enačb (izenačimo konstanti ter koeficienta pred $e^{\frac{x}{2}}$):

$$\begin{aligned}
5F &= 1, \\
4H &= 1.
\end{aligned}$$

Rešitev sistema je $F = \frac{1}{5}$, $H = \frac{1}{4}$. Sledi partikularna rešitev:

$$y_p = \frac{1}{5}x + \frac{1}{4}e^{\frac{x}{2}}.$$

Splošna rešitev diferencialne enačbe je zato

$$y = y_h + y_p = A + De^{-\frac{1}{2}x}\cos x + Ee^{-\frac{1}{2}x}\sin x + \frac{1}{5}x + \frac{1}{4}e^{\frac{x}{2}}.$$