2. KOLOKVIJ IZ MATEMATIKE II

Univerzitetni študij

3. junij 2009

1. [25T] Razvij funkcijo $f(x) = \pi - |x|$ v Fourierovo vrsto na intervalu $[-\pi, \pi]$.
   Rešitev:
   Dana funkcija je soda, zato so koeficienti $b_n = 0$.

   Koeficient a_0:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi (\pi - x)dx = \left(x - \frac{x^2}{2\pi}\right)\Big|_0^\pi = \frac{\pi}{2}.$$

   Koeficienti a_n:

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^\pi (\pi - x)\cos(nx)dx \\ &= \frac{2}{\pi}\left(\underbrace{\frac{\pi - x}{n}\sin(nx)\Big|_0^\pi}_{=0} - \frac{1}{n}\int_0^\pi \sin(nx)\right) \\ &= -\frac{2}{n^2\pi}\cos(nx)\Big|_0^\pi = \frac{2}{n^2\pi}(1 - (-1)^n) \end{aligned}$$

   Pri računanju drugega integrala uporabimo formulo per partes za $u = \pi - x$ in $dv = \cos(nx)dx$, torej je $du = -dx$ in $v = \frac{1}{n}\sin(nx)$.
   Fourierova vrsta:

$$f(x) = \frac{\pi}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n^2\pi}(1 - (-1)^n)\cos(nx).$$

2. [25T] Določi osi elipse

$$6x^2 + 8xy + 6y^2 = 10.$$

Namig: vezani ekstrem.

Rešitev:
Nalogo rešujemo z vezanimi ekstremi. Ker je elipsa v središčni legi, sta glavni polosi elipse najkrajša in najdaljša razdalja točk na elipsi do središča. Torej minimiziramo, oz. maksimiziramo funkcijo razdalje $d(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$, oz. kvadrat razdalje. Lagrangeova funkcija:

$$F(x, y, \lambda) = x^2 + y^2 + \lambda(6x^2 + 8xy + 6y^2 - 10).$$

Odvajamo jo po vseh treh spremenljivkah in odvode izenačimo z 0:

$$\begin{aligned} F_x &= 2x + 12\lambda x + 8\lambda y = 0, \\ F_y &= 2y + 8\lambda x + 12\lambda y = 0, \\ F_\lambda &= 6x^2 + 8xy + 6y^2 - 10 = 0. \end{aligned}$$

Prvo enačbo množimo z y, drugo z x, ju odštejemo, in dobimo $8\lambda(y^2 - x^2) = 0$, oz. $8\lambda(y - x)(y + x) = 0$. Možnost $\lambda = 0$ odpade, saj bi tedaj dobili točko $x = 0$, $y = 0$, ki ne leži na elipsi. V primeru $y = x$, dobimo iz tretje enačbe $20x^2 = 10$, torej $x^2 = y^2 = \frac{1}{2}$ in zato je ena polos enaka $a = \sqrt{x^2 + y^2} = 1$. V primeru $y = -x$, pa dobimo iz tretje enačbe $4x^2 = 10$, torej $x^2 = y^2 = \frac{5}{2}$ in zato je druga polos enaka $b = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{5}$.

3. [25T] Reši diferencialno enačbo

$$xy' + 3y = x^3y^2.$$

Poišči tisto rešitev, ki zadošča začetnemu pogoju $y(1) = 1$.

Rešitev:
To je Bernoullijeva diferencialna enačba. Najprej jo delimo z y^2:

$$xy^{-2}y' + 3y^{-1} = x^3.$$

Uvedemo novo spremenljivko $u = y^{-1}$ in $u' = -y^{-2}y'$ in dobimo:

$$-xu' + 3u = x^3,$$

kar je nehomogena linearna diferencialna enačba prvega reda.

(i) Homogeni del.

$$\begin{aligned}
-xu' + 3u &= 0 \\
\int \frac{du}{u} &= 3\int \frac{dx}{x} \\
\ln u &= 3\ln x + \ln C \\
u_H &= Cx^3
\end{aligned}$$

(ii) Nehomogeni del rešimo z variacijo konstante.

$$\begin{aligned}
u &= C(x)x^3 \\
u' &= C'(x)x^3 + 3C(x)x^2
\end{aligned}$$

Vstavimo v enačbo in dobimo:

$$-C'(x)x^4 - 3C(x)x^3 + 3C(x)x^3 = x^3.$$

Sledi:

$$\begin{aligned}
C'(x) &= -\frac{1}{x} \\
C(x) &= -\int \frac{1}{x}dx \\
C(x) &= -\ln x
\end{aligned}$$

Partikularna rešitev:

$$\Rightarrow u_p = -x^3 \ln x$$

Splošna rešitev linearne enačbe:

$$u(x) = u_p + u_H = (C - \ln x)x^3.$$

Obratna substitucija, da dobimo rešitev Bernoullijeve enačbe:

$$y(x) = \frac{1}{(C - \ln x)x^3}.$$

Začetni pogoj:

$$y(1) = \frac{1}{C} = 1 \quad \Rightarrow \quad C = 1.$$

Rešitev začetnega problema:

$$y(x) = \frac{1}{(1 - \ln x)x^3}.$$

4. [25T] Reši diferencialno enačbo

$$2y'' + 3y' - 2y = 10 + 5\mathrm{e}^{-2x}.$$

Rešitev:
To je nehomogena linearna diferencialna enačba drugega reda s konstantnimi koeficienti.

(i) Homogeni del:

$$2y'' + 3y' - 2y = 0.$$

Uporabimo nastavek $y = \mathrm{e}^{\lambda x}$ in dobimo karakteristični polinom $3\lambda^2 + 3\lambda - 2 = 0$. Ta polinom razstavimo in dobimo $(2\lambda - 1)(\lambda + 2) = 0$, kar nam da dve rešitvi, in sicer $\lambda_1 = \frac{1}{2}$ in $\lambda_2 = -2$.

$$\Rightarrow y_H = A\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x} + B\mathrm{e}^{-2x}$$

(ii) Partikularno rešitev dobimo s pomočjo nastavka $y_p = C + Dx\mathrm{e}^{-2x}$. Odvajamo in dobimo $y_p' = D\mathrm{e}^{-2x} - 2Dx\mathrm{e}^{-2x}$ in $y_p'' = -4D\mathrm{e}^{-2x} + 4Dx\mathrm{e}^{-2x}$. To vstavimo v enačbo:

$$-8D\mathrm{e}^{-2x} + 8Dx\mathrm{e}^{-2x} + 3D\mathrm{e}^{-2x} - 6Dx\mathrm{e}^{-2x} - 2C - 2Dx\mathrm{e}^{-2x} = 10 + 5\mathrm{e}^{-2x}$$

oz.

$$-2C - 5D\mathrm{e}^{-2x} = 10 + 5\mathrm{e}^{-2x}$$

$$\Rightarrow \quad C = -5, \quad D = -1$$

$$\Rightarrow y_p = -5 - x\mathrm{e}^{-2x}$$

Splošna rešitev:

$$y(x) = y_p + y_H = A\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x} + B\mathrm{e}^{-2x} - 5 - x\mathrm{e}^{-2x}.$$