Matematika II (UN) 1. kolokvij (9. april 2010)

REŠITVE

Naloga 1 (25 točk)

Izračunajte determinanto

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 & 4 & 0 & 0 \\ -1 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 5 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & -2 \end{vmatrix}.$$

Najprej lahko naredimo še eno ničlo v prvem stolpcu (2. vrstici prištejemo z 1/2 pomnoženo prvo vrstico) in determinanto po njem razvijemo:

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 & 4 & 0 & 0 \\ -1 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 5 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 5 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & -2 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 & 0 \\ 4 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 5 & -3 \\ 0 & 0 & 4 & -2 \end{vmatrix}$$

Spet lahko naredimo še eno ničlo v prvem stolpcu (2. vrstici prištejemo s 4 pomnoženo 1. vrstico) in determinanto po njem razvijemo:

$$2 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 & 0 \\ 4 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 5 & -3 \\ 0 & 0 & 4 & -2 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 7 & 6 & 1 \\ 0 & -2 & 5 & -3 \\ 0 & 0 & 4 & -2 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-1) \cdot \begin{vmatrix} 7 & 6 & 1 \\ -2 & 5 & -3 \\ 0 & 4 & -2 \end{vmatrix}$$

Dobljeno determinanto dimenzije 3×3 izračunamo po znani formuli:

$$2 \cdot (-1) \cdot \left| \begin{array}{ccc} 7 & 6 & 1 \\ -2 & 5 & -3 \\ 0 & 4 & -2 \end{array} \right| \begin{array}{cc} 7 & 6 \\ -2 & 5 \\ 0 & 4 \end{array} = -2 \cdot (-70 + 0 - 8 - 0 - (-84) - 24) = 36.$$

Naloga 2 (25 točk)

Dana je ravnina π z enačbo $x - z = 3$ ter točke $A(0, 1, -3)$, $B(5, 0, 2)$, $C(1, 1, -2)$ in $D(1, 0, 1)$.

a.) Katere izmed točk A, B, C in D ležijo na ravnini π? Odgovor utemeljite.

b.) Izračunajte ploščino trikotnika ABC.

c.) Zapišite enačbo premice p skozi točko D, ki je pravokotna na ravnino π.

d.) Izračunajte presečišče premice p in ravnine π.

Gremo po vrsti.

a.) *Točka leži na ravnini, če zadošča njeni enačbi. Ugotovimo, da za koordinate točk A, B in C velja $x - z = 3$, zato te točke ležijo na ravnini π. Za točko D pa imamo $x - z = 1 - 1 = 0$, kar pomeni, da točka D ne leži na ravnini π.*

b.) *Ploščino trikotnika ABC lahko izračunamo s pomočjo vektorskega produkta dveh vektorjev, ki trikotnik oklepata. To je pol ploščine paralelograma:*

$$S = \frac{1}{2} \cdot |\vec{AB} \times \vec{AC}|.$$

Določimo najprej iskana vektorja:

$$\begin{aligned} \vec{AB} &= \vec{r_B} - \vec{r_A} = (5,0,2) - (0,1,-3) = (5,-1,5), \\ \vec{AC} &= \vec{r_C} - \vec{r_A} = (1,1,-2) - (0,1,-3) = (1,0,1). \end{aligned}$$

Njun vektorski produkt je

$$\vec{AB} \times \vec{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 5 & -1 & 5 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (-1,0,1).$$

Ploščina trikotnika ABC je torej enaka

$$S = \frac{1}{2} \cdot |(-1,0,1)| = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{(-1)^2 + 0^2 + 1^2} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

c.) *Za smerni vektor premice p, ki gre skozi točko $D(1,0,1)$ in je pravokotna na ravnino π, lahko vzamemo normalo $\vec{n} = (1,0,-1)$ ravnine π. Dobimo enačbo:*

$$\frac{x-1}{1} = \frac{z-1}{-1}, y = 0$$

oziroma

$$x - 1 = 1 - z, y = 0.$$

d.) *Presečišče premice p in ravnine π najlažje izračunamo, če enačbo premice p pretvorimo v parametrično obliko:*

$$\begin{aligned} x &= 1 + t, \\ y &= 0, \\ z &= 1 - t. \end{aligned}$$

Sedaj to enačbo, ki opisuje koordinate x, y in z, vstavimo v enačbo ravnine. Dobimo

$$(1 + t) - (1 - t) = 3,$$

od koder sledi $t = \frac{3}{2}$ in presečišče je točka $P(\frac{5}{2}, 0, -\frac{1}{2})$.

Naloga 3 (25 točk)

Poiščite vse rešitve sistema linearnih enačb:

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} -3x & + & 2y & + & z & & & = & 1, \\ 4x & + & 2y & - & z & + & 2u & = & -2. \end{array}$$

Sistem linearnih enačb rešimo z Gaussovo eliminacijo (sistem predstavimo z razširjeno matriko in delamo ničle pod glavno diagonalo):

$$R = [A|b] \;=\; \left[\begin{array}{rrrr|r} -3 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 4 & 2 & -1 & 2 & -2 \end{array}\right] \equiv \left[\begin{array}{rrrr|r} -3 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 14 & 1 & 6 & -2 \end{array}\right].$$

Novo drugo vrstico smo izračunali kot 4×1*. vrstica* $+\ 3 \times 2$*. vrstica. Poenostavljen sistem linearnih enačb se sedaj glasi takole:*

$$\begin{aligned} -3x + 2y + z \quad &= 1 \\ 14y + z + 6u \quad &= -2. \end{aligned}$$

Ker imata matriki sistema (A in R) obe rang enak 2*, neznanke pa so* 4*, bosta v iskani rešitvi* $4 - 2 = 2$ *prosta parametra. To je:*

$$\begin{aligned} & x = \textit{poljuben} \\ & y = \textit{poljuben} \\ & z = 1 + 3x - 2y \quad \textit{(izrazimo iz prve enačbe)} \\ & u = \frac{1}{6} \cdot (-2 - 14y - z) = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}x - 2y \quad \textit{(izrazimo iz druge enačbe)} \end{aligned}$$

Naloga 4 (25 točk)

Naj bo $\mathcal{L} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ linearna preslikava, dana s predpisom

$$\mathcal{L}\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x \\ y \\ 0 \end{bmatrix}.$$

a.) Katere vektorje preslikava $\mathcal{L}$ ohranja? To je, za kakšne vektorje $\vec{v}$ velja $\mathcal{L}(\vec{v}) = \vec{v}$?

b.) Izračunajte kot med vektorjem $\vec{a} = [\sqrt{2} \;\; \sqrt{2} \;\; 2]^T$ in njegovo sliko $\mathcal{L}(\vec{a})$.

c.) Poiščite matriko, ki predstavlja linearno preslikavo $\mathcal{L}$.

Opazimo, da gre za pravokotno projekcijo na ravnino xy*, ki prvi dve koordinati vektorja ohrani, zadnjo pa postavi na* 0*.*

a.) Precej očitno je, da preslikava $\mathcal{L}$ ohranja natanko tiste vektorje, ki ležijo na ravnini xy. To so vektorji, katerih zadnja koordinata je enaka 0, torej vektorji oblike $[x\ y\ 0]^T$, kjer sta x in y poljubni realni števili. Te vektorje dobimo tudi, če nastavimo preprosto enačbo

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ 0 \end{bmatrix}.$$

b.) Pravokotna projekcija vektorja $\vec{a} = [\sqrt{2}\ \ \sqrt{2}\ \ 2]^T$ na ravnino xy je enaka

$$\mathcal{L}\left(\begin{bmatrix} \sqrt{2} \\ \sqrt{2} \\ 2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} \sqrt{2} \\ \sqrt{2} \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Kot med obema vektorjema zdaj izračunamo po formuli:

$$\cos\phi = \frac{\vec{a} \cdot \mathcal{L}(\vec{a})}{|\vec{a}| \cdot |\mathcal{L}(\vec{a})|} = \frac{(\sqrt{2}, \sqrt{2}, 2) \cdot (\sqrt{2}, \sqrt{2}, 0)}{\sqrt{8} \cdot \sqrt{4}} = \frac{4}{4\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Kot med vektorjem $\vec{a}$ in njegovo pravokotno projekcijo na ravnino xy je torej enak $\frac{\pi}{4}$.

c.) Stolpce matrike linearne preslikave $\mathcal{L}$ tvorijo slike standardnih baznih vektorjev $[1\ 0\ 0]^T$, $[0\ 1\ 0]^T$ in $[0\ 0\ 1]^T$. To so vektorji $[1\ 0\ 0]^T$, $[0\ 1\ 0]^T$ in $[0\ 0\ 0]^T$. Iskana matrika je zato

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$