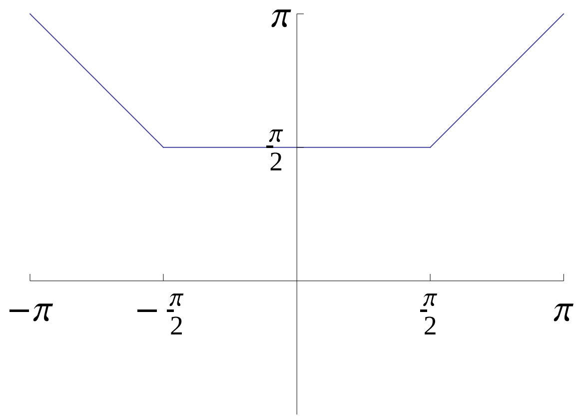
2. KOLOKVIJ IZ MATEMATIKE II

Univerzitetni študij

4. junij 2010

1. [25T] Razvij funkcijo $f(x)$, ki je podana s spodnjim grafom v Fourierovo vrsto na intervalu $[-\pi, \pi]$.



Rešitev:
Iz grafa preberemo funkcijski predpis na intervalu $[0, \pi]$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\pi}{2}, & 0 \le x \le \frac{\pi}{2} \\ x, & \frac{\pi}{2} < x \le \pi \end{cases}$$

Koeficienti a_n:

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos(nx)dx \\
&= \frac{2}{\pi}\left(\int_0^{\pi/2}\frac{\pi}{2}\cos(nx)dx + \int_{\pi/2}^{\pi} x\cos(nx)dx\right) \\
&= \frac{2}{\pi}\left(\frac{\pi}{2n}\sin(nx)\Big|_0^{\pi/2} + \frac{x}{n}\sin(nx)\Big|_{\pi/2}^{\pi} - \frac{1}{n}\int_{\pi/2}^{\pi}\sin(nx)dx\right) \\
&= \frac{2}{\pi}\left(\frac{\pi}{2n}\sin\frac{n\pi}{2} - \frac{\pi}{2n}\sin\frac{n\pi}{2} + \frac{1}{n^2}\cos(nx)\Big|_{\pi/2}^{\pi}\right) \\
&= \frac{2}{\pi n^2}\left((-1)^n - \cos\frac{n\pi}{2}\right)
\end{aligned}$$

Pri računanju drugega integrala uporabimo formulo per partes za $u = x$ in $dv = \cos(nx)dx$, torej je $du = dx$ in $v = \frac{1}{n}\sin(nx)$.
Koeficient a_0:

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)dx = \frac{1}{\pi}\left(\int_0^{\pi/2} \frac{\pi}{2}dx + \int_{\pi/2}^{\pi} xdx\right) = \\ &\frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi}{2}x\Big|_0^{\pi/2} + \frac{x^2}{2}\Big|_{\pi/2}^{\pi}\right) = \frac{\pi}{4} + \frac{3\pi}{8} = \frac{5\pi}{8}. \end{aligned}$$

Dana funkcija je soda, zato so koeficienti $b_n = 0$.
Fourierova vrsta:

$$f(x) = \frac{5\pi}{8} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\pi n^2}\left((-1)^n - \cos\frac{n\pi}{2}\right)\cos(nx).$$

2. [25T] S pomočjo totalnega diferenciala izračunaj približno vrednost za

$$\mathrm{e}^{1.97^2-4.01}.$$

Rešitev:
Uporabili bomo formulo

$$f(a+h, b+k) \approx f(a,b) + f_x(a,b)\cdot h + f_y(a,b)\cdot k.$$

Ustrezna funkcija dveh spremenljivk:

$$f(x,y) = \mathrm{e}^{x^2-y}.$$

Ustrezne vrednosti:

$$a = 2, \quad b = 4, \quad h = -0.03, \quad k = 0.01.$$

Parcialni odvodi:

$$\begin{aligned} f_x &= 2x\mathrm{e}^{x^2-y} \\ f_y &= -\mathrm{e}^{x^2-y} \end{aligned}$$

Ker je $f(2,4) = 1$, $f_x(2,4) = 4$ in $f_y(2,4) = -1$, dobimo po zgornji formuli

$$\mathrm{e}^{1.97^2-4.01} \approx 1 - 4\cdot\frac{3}{100} - 1\cdot\frac{1}{100} = 1 - \frac{13}{100} = 0.87$$

3. [25T] Reši diferencialno enačbo

$$y' + 2xy = x\mathrm{e}^{-2x^2}.$$

Poišči tisto rešitev, ki zadošča začetnemu pogoju $y(0) = 1$.

Rešitev:
To je nehomogena linearna diferencialna enačba prvega reda.

(i) Homogeni del.

$$\begin{aligned} y' + 2xy &= 0 \\ \int \frac{dy}{y} &= -2\int x\,dx \\ \ln y &= -x^2 + \ln C \\ y_H &= C\mathrm{e}^{-x^2} \end{aligned}$$

(ii) Nehomogeni del rešimo z variacijo konstante.

$$\begin{aligned} y &= C(x)\mathrm{e}^{-x^2} \\ y' &= C'(x)\mathrm{e}^{-x^2} - 2xC(x)\mathrm{e}^{-x^2} \end{aligned}$$

Vstavimo v enačbo in dobimo:

$$C'(x)\mathrm{e}^{-x^2} - 2xC(x)\mathrm{e}^{-x^2} + 2xC(x)\mathrm{e}^{-x^2} = x\mathrm{e}^{-2x^2}.$$

Sledi (substitucija $t = -x^2$, $dt = -2x\,dx$):

$$\begin{aligned} C'(x) &= x\mathrm{e}^{-x^2} \\ C(x) &= \int x\mathrm{e}^{-x^2}dx \\ C(x) &= -\frac{1}{2}\int \mathrm{e}^t dt = -\frac{1}{2}\mathrm{e}^t = -\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-x^2} \end{aligned}$$

Partikularna rešitev:

$$\Rightarrow y_p = -\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-2x^2}$$

Splošna rešitev linearne enačbe:

$$y(x) = y_p + y_H = -\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-2x^2} + C\mathrm{e}^{-x^2}.$$

Začetni pogoj:

$$y(0) = -\frac{1}{2} + C = 1 \quad \Rightarrow \quad C = \frac{3}{2}.$$

Rešitev začetnega problema:

$$y(x) = -\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-2x^2} + \frac{3}{2}\mathrm{e}^{-x^2}.$$

4. [25T] Reši diferencialno enačbo

$$y'' - 3y' + 2y = \mathrm{e}^{3x} + \sin(2x).$$

Rešitev:
To je nehomogena linearna diferencialna enačba drugega reda s konstantnimi koeficienti.

(i) Homogeni del:

$$y'' - 3y' + 2y = 0.$$

Uporabimo nastavek $y = \mathrm{e}^{\lambda x}$ in dobimo karakteristični polinom $\lambda^2 - 3\lambda + 2 = (\lambda - 1)(\lambda - 2) = 0$, ki ima dve rešitvi $\lambda_1 = 1$ in $\lambda_2 = 2$.

$$\Rightarrow y_H = A\mathrm{e}^{x} + B\mathrm{e}^{2x}$$

(ii) Partikularno rešitev poiščemo s pomočjo nastavka

$$\begin{aligned} y_p &= C\mathrm{e}^{3x} + D\sin(2x) + E\cos(2x) \\ y_p' &= 3C\mathrm{e}^{3x} + 2D\cos(2x) - 2E\sin(2x) \\ y_p'' &= 9C\mathrm{e}^{3x} - 4D\sin(2x) - 4E\cos(2x) \end{aligned}$$

Vstavimo v enačbo:

$$\begin{aligned} 9C\mathrm{e}^{3x} - 4D\sin(2x) - 4E\cos(2x) - 9C\mathrm{e}^{3x} - 6D\cos(2x) + 6E\sin(2x) \\ +2C\mathrm{e}^{3x} + 2D\sin(2x) + 2E\cos(2x) = \mathrm{e}^{3x} + \sin(2x) \end{aligned}$$

Sledi

$$2C = 1 \quad \Rightarrow \quad C = \frac{1}{2}$$

in

$$-2D + 6E = 1, -6D - 2E = 0 \quad \Rightarrow \quad D = -\frac{1}{20}, E = \frac{3}{20}$$

$$\Rightarrow y_p = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{3x} - \frac{1}{20}\sin(2x) + \frac{3}{20}\cos(2x)$$

Splošna rešitev:

$$y(x) = y_p + y_H = A\mathrm{e}^{x} + B\mathrm{e}^{2x} + \frac{1}{2}\mathrm{e}^{3x} - \frac{1}{20}\sin(2x) + \frac{3}{20}\cos(2x).$$