REŠITVE

Naloga 1 (25 točk)

Dana je funkcija $f(x) = 1$, ki je definirana na intervalu $[0, 1]$.

a.) Funkcijo $f(x)$ razvijte v Fourierovo vrsto.

b.) Funkcijo $f(x)$ razvijte v sinusno Fourierovo vrsto.

a.) Navadna Fourierova vrsta funkcije $f(x)$ je kar $F(x) = 1$. Definirana je na celi realni osi.

b.) Sinusno Fourierovo vrsto dobimo, če v Fourierovo vrsto razvijemo funkcijo $s(x)$, ki jo dobimo kot liho nadaljevanje funkcije $f(x)$. Torej

$$s(x) = \begin{cases} 1 & 0 \le x \le 1 \\ -1 & -1 \le x < 0 \end{cases}.$$

Funkcija $s(x)$ je definirana na intervalu $[-1, 1]$ in je liha, zato dobimo:

$$\begin{aligned}
a_0 &= 0, \\
a_n &= 1, \\
b_n &= \frac{2}{2}\int_{-1}^{1} s(x)\sin(n\pi x)\,dx = 2\int_0^1 s(x)\sin(n\pi x)\,dx = 2\int_0^1 1\cdot\sin(n\pi x)\,dx \\
&= -2\cdot\frac{1}{n\pi}\left[\cos(n\pi x)\right]_0^1 = -\frac{2}{n\pi}\left(\cos(n\pi) - \cos 0\right) = \frac{2}{n\pi}\left(1 - (-1)^n\right) \\
&= \begin{cases} \frac{4}{n\pi} & n \text{ je lih} \\ 0 & n \text{ je sod} \end{cases}.
\end{aligned}$$

Sledi sinusna Fourierova vrsta:

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(n\pi x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n\pi}\left(1-(-1)^n\right)\sin(n\pi x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{4}{(2k+1)\pi}\sin((2k+1)\pi x).$$

Naloga 2 (25 točk)

Prodajalec ocenjuje, da mu prodaja izdelka prinese zaslužek

$$f(x, y) = y\sqrt{xy},$$

kjer je x znesek, vložen v oblikovanje izdelka, y pa znesek, vložen v reklamo. Prodajalec bo za oblikovanje in reklamo porabil 12000 EUR. Kako naj ta sredstva razporedi, da bo zaslužek največji?

NAMIG: Vezani ekstremi.

Sredstva v višini 12 000 EUR prodajalec nameni oblikovanju izdelka in reklami, kar lahko zapišemo z naslednjim pogojem:

$$x + y = 12000.$$

Največji zaslužek dobimo kot maksimum funkcije $f(x, y)$ *pri zgornjem pogoju, torej kot vezan ekstrem. Zapišimo Lagrangeovo funkcijo:*

$$F(x, y; \lambda) = y\sqrt{xy} + \lambda(x + y - 12000) = x^{\frac{1}{2}} y^{\frac{3}{2}} + \lambda(x + y - 12000).$$

Kandidati za vezane ekstreme so stacionarne točke Lagrangeove funkcije, to je rešitve naslednjega sistema enačb:

$$\begin{aligned} F_x &= \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} y^{\frac{3}{2}} + \lambda = 0, \\ F_y &= \frac{3}{2} x^{\frac{1}{2}} y^{\frac{1}{2}} + \lambda = 0, \\ F_\lambda &= x + y - 12000 = 0. \end{aligned}$$

Če prvi dve enačbi odštejemo, dobimo

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} y^{\frac{3}{2}} - \frac{3}{2} x^{\frac{1}{2}} y^{\frac{1}{2}} &= 0, \\ \frac{y\sqrt{y}}{2\sqrt{x}} - \frac{3\sqrt{x}\sqrt{y}}{2} &= 0, \\ y\sqrt{y} - 3x\sqrt{y} &= 0, \\ \sqrt{y}(y - 3x) &= 0. \end{aligned}$$

Ločimo torej dve možnosti:

- $y = 0 \Rightarrow x = 12000,$
- $y = 3x \Rightarrow x + 3x = 12000 \Rightarrow x = 3000$ *in* $y = 9000.$

Ker je

$$\begin{aligned} f(12000, 0) &= 0, \\ f(3000, 9000) &= 9000 \cdot \sqrt{3000 \cdot 9000} > 0, \end{aligned}$$

vidimo, da je v prvi točki vezan minimum, v drugi pa vezan maksimum. Torej, prodajalec bo dosegel največji zaslužek, če bo za oblikovanje izdelka namenil 3000 *EUR, za reklamo pa* 9000 *EUR.*

Naloga 3 (25 točk)

Poiščite tisto rešitev diferencialne enačbe

$$xy' = -(x + y),$$

ki gre skozi točko $T(1, -4)$.

Diferencialno enačbo najprej malo preoblikujmo:

$$\begin{aligned} xy' &= -(x+y), \\ y' &= -\frac{x+y}{x}, \\ y' &= -1-\frac{y}{x}. \end{aligned}$$

Vidimo, da je homogena. Če bi jo preuredili nekoliko drugače, bi dobili linearno dif. enačbo 1. reda. Postopek reševanja si lahko torej izberemo; napisali bomo rešitev, ki sledi postopku reševanja homogenih diferencialnih enačb. Uvedimo novo odvisno spremenljivko

$$u = \frac{y}{x} \Rightarrow y = xu \Rightarrow y' = u + xu'.$$

Ko funkcijo $y(x)$ zamenjamo s funkcijo $u(x)$, dobimo dif. enačbo z ločljivima spremenljivkama:

$$\begin{aligned} u + xu' &= -1-u, \\ xu' &= -1-2u. \end{aligned}$$

Rešimo jo:

$$\begin{aligned} x\frac{du}{dx} &= -1-2u, \\ \frac{du}{1+2u} &= -\frac{dx}{x}, \\ \int \frac{du}{1+2u} &= -\int \frac{dx}{x}, \\ t = 1+2u \Rightarrow dt = 2du, & \\ \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t} &= -\int \frac{dx}{x}, \\ \frac{1}{2}\ln t &= -\ln x + \ln C, \\ \ln t^{\frac{1}{2}} &= \ln \frac{C}{x}, \\ t^{\frac{1}{2}} &= \frac{C}{x}, \\ t &= \frac{C^2}{x^2} = \frac{D}{x^2}, \\ 1+2u &= \frac{D}{x^2}, \\ u &= \frac{D}{2x^2} - \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Sedaj le še u zamenjamo z $\frac{y}{x}$ in dobimo splošno rešitev homogene dif. enačbe:

$$\begin{aligned} \frac{y}{x} &= \frac{D}{2x^2} - \frac{1}{2}, \\ y &= \frac{D}{2x} - \frac{x}{2}. \end{aligned}$$

Rešitev, ki gre skozi točko $T(1,-4)$, dobimo takole:

$$\begin{aligned} y &= \frac{D}{2x} - \frac{x}{2}, \\ -4 &= \frac{D}{2} - \frac{1}{2}, \\ D &= -7. \end{aligned}$$

Rešitev naloge je torej funkcija

$$y = -\frac{7}{2x} - \frac{x}{2}.$$

Naloga 4 (25 točk)

Poiščite splošno rešitev diferencialne enačbe

$$y''' - y'' - 3y' + 3y = x - \mathrm{e}^{2x}.$$

Splošna rešitev dane nehomogene linearne dif. enačbe s konstantnimi koeficienti je oblike

$$y(x) = y_h + y_p,$$

kjer je y_h rešitev homogene linearne dif. enačbe s konst. koef., y_p pa partikularna rešitev.

A. Homogeni del (računamo y_h):

$$y''' - y'' - 3y' + 3y = 0.$$

To je homogena linearna dif. enačba s konstantnimi koeficienti. Dobimo karakteristično enačbo

$$\begin{aligned} \lambda^3 - \lambda^2 - 3\lambda + 3 &= 0 \\ \lambda^2(\lambda-1) - 3(\lambda-1) &= 0 \\ (\lambda-1)(\lambda^2-3) &= 0 \\ (\lambda-1)(\lambda-\sqrt{3})(\lambda+\sqrt{3}) &= 0 \\ \lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = \sqrt{3},\ \lambda_3 = -\sqrt{3} & \end{aligned}$$

Rešitev homogenega dela je zato:

$$y_h = C_1 e^x + C_2 e^{\sqrt{3}\,x} + C_3 e^{-\sqrt{3}\,x}.$$

B. Nehomogeni del (računamo y_p):

Partikularno rešitev y_p iščemo z metodo nedoločenih koeficientov. Za nastavek vzamemo funkcijo iste oblike, kot je desna stran

$$b(x) = x - e^{2x}$$

z nekaj prostimi parametri.

Zaradi prvega dela x dobimo prvi del nastavka

$$Ax + B.$$

Zaradi drugega dela e^{2x}, kjer je $\alpha + i\beta = 2$, kar ni ničla karakteristične enačbe iz homogenega dela in je zato $k = 0$, dobimo drugi del nastavka

$$Ce^{2x}.$$

Sledi nastavek za partikularno rešitev

$$y_p = Ax + B + Ce^{2x}$$

z nedoločenimi koeficienti A, B in C. Določimo jih, tako da nastavek vstavimo v dif. enačbo. Še prej ga seveda moramo trikrat odvajati:

$$\begin{aligned} y &= Ax + B + Ce^{2x}, \\ y' &= A + 2Ce^{2x}, \\ y'' &= 4Ce^{2x}, \\ y''' &= 8Ce^{2x}. \end{aligned}$$

Funkcije y, y', y'', y''' vstavimo v dif. enačbo:

$$8Ce^{2x} - 4Ce^{2x} - 3(A + 2Ce^{2x}) + 3(Ax + B + Ce^{2x}) = x - e^{2x},$$

ki jo uredimo po linearno neodvisnih funkcijah e^{2x}, x in 1:

$$Ce^{2x} + 3Ax + 3B - 3A = x - e^{2x}.$$

Enačbo rešimo, tako da primerjamo koeficiente pred linearno neodvisnimi funkcijami e^{2x}, x in 1 na obeh straneh enačbe:

$$\begin{array}{rcl} e^{2x}: & C & = -1, \\ x: & 3A & = 1, \\ 1: & 3B - 3A & = 0. \end{array}$$

Sledi rešitev sistema: $A = \frac{1}{3}$, $B = \frac{1}{3}$ in $C = -1$. Partikularna rešitev dif. enačbe se zato glasi

$$y_p = \frac{1}{3}x + \frac{1}{3} - e^{2x}.$$

Splošna rešitev dif. enačbe je torej

$$y = y_h + y_p = C_1 e^{x} + C_2 e^{\sqrt{3}\,x} + C_3 e^{-\sqrt{3}\,x} + \frac{1}{3}x + \frac{1}{3} - e^{2x}.$$