REŠITVE

Naloga 1 (25 točk)

Dana je linearna preslikava s predpisom $\tau(\vec{x}) = A \cdot \vec{x} - A^{-1} \cdot \vec{x}$, kjer je

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix},$$

A^{-1} pa je inverzna matrika matrike A.

a.) Poiščite vse lastne vrednosti matrike A.

b.) Določite matriko T linearne preslikave τ v standardni bazi prostora $\mathbb{R}^3$.

c.) Ali obstaja neničeln vektor $\vec{x}$, za katerega velja $A\vec{x} = 0$? Odgovor utemeljite.

a.) Lastne vrednosti matrike A so ničle karakterističnega polinoma

$$\det(A - \lambda I) = \left| \begin{array}{ccc} -\lambda & 1 & 1 \\ -1 & -\lambda & 1 \\ 1 & -1 & -\lambda \end{array} \right| \begin{array}{cc} -\lambda & 1 \\ -1 & -\lambda \\ 1 & -1 \end{array} = -\lambda^3 + 1 + 1 + \lambda - \lambda - \lambda$$

$$= -\lambda^3 - \lambda + 2 = -(\lambda - 1)(\lambda^2 + \lambda + 2).$$

Sledi $\lambda_1 = 1$ in $\lambda_{2,3} = \frac{-1 \pm i\sqrt{7}}{2}$.

b.) Ker je

$$\tau(\vec{x}) = A \cdot \vec{x} - A^{-1} \cdot \vec{x} = (A - A^{-1})\vec{x},$$

je matrika T linearne preslikave τ v standardni bazi prostora $\mathbb{R}^3$ enaka

$$T = A - A^{-1}.$$

Najprej zato izračunajmo inverzno matriko matrike A. Za izračun uporabimo Gaussovo eliminacijo:

$$[A|I] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \equiv \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \quad \textit{premešamo vrstice}$$

$$\equiv \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \equiv \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right] \frac{v_3 + v_1}{v_3 + v_2}$$

$$\equiv \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right] \equiv \left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right] \frac{2v_2 - v_3}{2v_1 + v_2}$$

$$\equiv \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1/2 & -1/2 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 & 1/2 & -1/2 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 & 1/2 & 1/2 \end{array}\right] = [I|A^{-1}] \quad \textit{vsako vrstico delimo z } 2$$

Dobili smo

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1/2 & -1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 & -1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 1/2 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

in zato

$$T = A - A^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1/2 & -1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 & -1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 1/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/2 & 3/2 & 1/2 \\ -3/2 & 1/2 & 3/2 \\ 1/2 & -3/2 & -1/2 \end{bmatrix}$$
$$= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -1 & 3 & 1 \\ -3 & 1 & 3 \\ 1 & -3 & -1 \end{bmatrix}.$$

c.) Število 0 *ni lastna vrednost matrike* A*, zato takšen vektor ne obstaja. To lahko ugotovimo tudi drugače. Enačba* $A\vec{x} = 0$ *predstavlja nek homogen sistem linearnih enačb, iščemo pa netrivialno rešitev. Ker je matrika kvadratna, ima tak sistem netrivialno rešitev natanko tedaj, kadar je determinantna matrike koeficientov sistema enaka* 0*. Ker v našem primeru velja* $\det A = 2$*, netrivilna rešitev sistema ne obstaja.*

Naloga 2 (25 točk)

Dana je matrična enačba $AX = B^T X$, kjer sta

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}.$$

a.) Kakšne dimenzije lahko ima matrika X, ki je rešitev dane enačbe? Odgovor utemeljite.

b.) Poiščite vse realne matrike X dimenzije 2×2, ki rešijo dano enačbo. Poiščite vsaj eno neničelno matriko druge dimenzije, ki reši enačbo.

a.) Dimenzije matrike X*, ki je rešitev dane enačbe, omejuje matrično množenje,*

$$\underbrace{A}_{3\times 2} \cdot \underbrace{X}_{2\times \_} = \underbrace{\underbrace{B}_{2\times 3}{}^{T}}_{3\times 2} \cdot \underbrace{X}_{2\times \_},$$

pri katerem mora biti število stolpcev leve matrike enako številu vrstic desne matrike. Na ta način dobimo pogoj, da mora matrika X *imeti* 2 *vrstici. Število stolpcev matrike* X *je lahko poljubno. Velja torej, da je dimenzija matrike* X *enaka* $2 \times n$*, kjer je* n *poljubno naravno število.*

b.) Za neničelne matrike

$$X = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

dimenzije 2×2, ki rešijo dano enačbo, velja

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} a & b \\ a & b \\ a & b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2c & 2d \\ 2c & 2d \\ 2c & 2d \end{bmatrix}.$$

Ta enačba nam zdaj da 2 pogoja: $a = 2c$ in $b = 2d$. Iskana družina matrik je zato

$$X = \begin{bmatrix} 2c & 2d \\ c & d \end{bmatrix},$$

kjer sta c in d poljubni realni števili. Dano matrično enačbo rešijo npr. tudi naslednje matrike:

$$X_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad X_2 = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad X_3 = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad X_4 = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}, \ \ldots$$

Naloga 3 (25 točk)

Točke $A(3, 0, -5)$, $B(1, 2, -1)$, $C(4, 0, 0)$ in $D(3, -1, 0)$ so oglišča tristrane piramide v prostoru $\mathbb{R}^3$.

a.) Izračunajte ploščino trikotnika ABC.

b.) Izračunajte višino piramide $ABCD$ skozi oglišče D.

c.) Ali točke A, B in C ležijo na skupni ravnini? Ali točke A, B, C in D ležijo na skupni ravnini? Oba odgovora utemeljite.

Najprej določimo tri vektorje, ki piramido oklepajo:

$$\begin{aligned} \vec{a} &= \vec{AB} = \vec{r_B} - \vec{r_A} = (1, 2, -1) - (3, 0, -5) = (-2, 2, 4), \\ \vec{b} &= \vec{AC} = \vec{r_C} - \vec{r_A} = (4, 0, 0) - (3, 0, -5) = (1, 0, 5), \\ \vec{c} &= \vec{AD} = \vec{r_D} - \vec{r_A} = (3, -1, 0) - (3, 0, -5) = (0, -1, 5). \end{aligned}$$

a.) Ploščina trikotnika ABC je enaka polovici ploščine paralelograma, ki ga oklepata $\vec{a}$ in $\vec{b}$. Velja:

$$\begin{aligned} p_{ABC} &= \frac{1}{2}|\vec{a} \times \vec{b}| = \frac{1}{2}\left| \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -2 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & 5 \end{vmatrix} \right| = \frac{1}{2}|(10, 14, -2)| = \frac{1}{2}\sqrt{10^2 + 14^2 + (-2)^2} \\ &= \frac{1}{2}\sqrt{300} = \frac{1}{2} \cdot 10\sqrt{3} = 5\sqrt{3}. \end{aligned}$$

.

b.) *Višino v_D piramide $ABCD$ skozi oglišče D lahko dobimo iz formule za izračun prostornine tristrane piramide:*

$$V = \frac{1}{6}|(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})| = \frac{1}{3}p_{ABC} \cdot v_D.$$

Sledi

$$v_D = \frac{|(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})|}{2p_{ABC}}.$$

Izračunati moramo še mešani produkt

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = \left|\begin{array}{ccc} -2 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & 5 \\ 0 & -1 & 5 \end{array}\right| \begin{array}{cc} -2 & 2 \\ 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{array} = -24.$$

Sedaj dobimo višino piramide

$$v_D = \frac{|(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})|}{2p_{ABC}} = \frac{24}{10\sqrt{3}} = \frac{4\sqrt{3}}{5}.$$

c.) *Poljubne tri nekolinearne točke določajo eno ravnino. Tudi točke A, B in C zato določajo oziroma ležijo na skupni ravnini, saj je ploščina trikotnika, ki ga oklepajo, različna od 0. Točke A, B, C in D ne ležijo na skupni ravnini, ker je $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) \neq 0$.*

Naloga 4 (25 točk)

Dani sta dve ravnini v prostoru $\mathbb{R}^3$. Njuni enačbi sta $2x - y - 3 = 0$ in $x + y - 5z = 0$.

a.) Zapišite enačbo premice, v kateri se dani ravnini sekata. Zapišite tudi smerni vektor te premice in eno točko na njej.

b.) Katere ravnine imajo z danima ravninama natanko eno skupno točko? Opišite njihovo lego v prostoru.

a.) *Enačbo premice, v kateri se dani ravnini sekata, dobimo kot 1-parametrično rešitev sistema linearnih enačb:*

$$\begin{aligned} 2x - y &= 3, \\ x + y - 5z &= 0. \end{aligned}$$

Rešitev sisitema se glasi takole:

$$\begin{aligned} x &= \textit{poljuben}, \\ y &= 2x - 3, \\ z &= \frac{1}{5}(x + y) = \frac{3}{5}x - \frac{3}{5}. \end{aligned}$$

Parametrična oblika enačbe iskane presečne premice p je zato

$$\begin{aligned} x &= t, \\ y &= 2t - 3, \\ z &= \frac{3}{5}t - \frac{3}{5}. \end{aligned}$$

Smerni vektor premice je $\vec{s} = (1, 2, \frac{3}{5})$, *ena točka na njen pa je npr.* $A(0, -3, -\frac{3}{5})$.

b.) Iščemo ravnino Π, *ki ima natanko eno skupno točko s presečno premico p iz točke a.). To je ravnina, ki jo premica p prebada v eni točki. Premica p torej ne sme biti mimobežna ali ležati na ravnini* Π, *kar pomeni, da premica p ne sme biti vzporedna ravnini* Π. *Temu pogoju zadoščajo natanko tiste ravnine v prostoru, katerih normala ni pravokotna na smerni vektor premice p. Za normalo* $\vec{n} = (a, b, c)$ *takšne ravnine mora veljati* $\vec{n} \cdot \vec{s} \neq 0$. *Iskan zadosten pogoj je zato* $a + 2b + \frac{3}{5}c \neq 0$.