2. KOLOKVIJ IZ MATEMATIKE II

Univerzitetni študij

8. junij 2012

1. [25T] Dana je funkcija $f(x) = \cos(8x)$.

   a) Z uporabo Taylorjeve vrste izračunajte limito

   $$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)-1}{x^2}.$$

   b) Koliko koeficientov a_n, $n \geq 0$, v razvoju funkcije $f(x)$ v Fourierovo vrsto na intervalu $[-\pi, \pi]$ je enakih 1?

   Rešitev:

   a)

   $$\lim_{x\to 0} \frac{\cos(8x)-1}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{-32x^2 + \frac{512}{3}x^4 \mp \cdots}{x^2} = -32$$

   b) Edini neničelni koeficient je $a_8 = 1$.

2. [25T] Na hiperboli z enačbo $9x^2 - 4y^2 = 36$ poiščite točko, ki je najbližja točki $T(0,1)$. Ali obstaja točka, ki je najdlje od točke T? Skica je obvezna.

   Rešitev:
   Hiperbola ima glavni polosi $a = 2$ in $b = 3$. Funkcija razdalje je

   $$d(x,y) = \sqrt{x^2 + (y-1)^2}.$$

   Sestavimo Lagrangeevo funkcijo

   $$F(x,y,\lambda) = x^2 + (y-1)^2 + \lambda(9x^2 - 4y^2 - 36)$$

   in jo odvajamo po vseh 3 spremenljivkah

   $$\begin{aligned} F_x &= 2x + 18\lambda x = 0 \\ F_y &= 2y - 2 - 8\lambda y = 0 \\ F_\lambda &= 9x^2 - 4y^2 - 36 = 0 \end{aligned}$$

   Kandidate za vezane ekstreme dobimo tam, kjer so vsi odvodi enaki 0. Iz prvih dveh enačb eliminiramo λ in dobimo $2x(13y-9) = 0$. Ker za $x = 0$ ne dobimo rešitve, je edina rešitev $y = \frac{9}{13}$ in zato $x = \pm\frac{2\sqrt{178}}{13}$. Torej dobimo dve (simetrični) točki, ki sta najbližji dani točki: $T_1(-\frac{2\sqrt{178}}{13}, \frac{9}{13})$ in $T_2(\frac{2\sqrt{178}}{13}, \frac{9}{13})$. Taka točka, ki bi bila najdlje od dane točke pa ne obstaja.

3. [25T] Rešite diferencialno enačbo

   $$y' = \mathrm{e}^{2x} + 3y.$$

   Katera rešitev ima lokalni minimum v točki $x_0 = 0$?

   Rešitev:
   To je nehomogena linearna diferencialna enačba prvega reda.

(i) Homogeni del.

$$\begin{aligned} y' - 3y &= 0 \\ \int \frac{dy}{y} &= \int 3dx \\ \ln y &= 3x + \ln C \\ y_H &= C\mathrm{e}^{3x} \end{aligned}$$

(ii) Nehomogeni del rešimo z variacijo konstante.

$$\begin{aligned} y &= C(x)\mathrm{e}^{3x} \\ y' &= C'(x)\mathrm{e}^{3x} + 3C(x)\mathrm{e}^{3x} \end{aligned}$$

Vstavimo v enačbo in dobimo $C'(x) = \mathrm{e}^{-x}$, od koder sledi $C(x) = -\mathrm{e}^{-x}$ in dalje

$$y_p = -\mathrm{e}^{2x}.$$

Splošna rešitev linearne enačbe

$$y(x) = y_p + y_H = -\mathrm{e}^{2x} + C\mathrm{e}^{3x}.$$

Iščemo tako rešitev, za katero bo $y'(0) = 0$. Ker je $y'(x) = -2\mathrm{e}^{2x} + 3C\mathrm{e}^{3x}$, sledi $y'(0) = -2 + 3C = 0$, od koder dobimo $C = \frac{2}{3}$. Iskana rešitev:

$$y(x) = -\mathrm{e}^{2x} + \tfrac{2}{3}\mathrm{e}^{3x}.$$

4. [25T] Dana je diferencialna enačba

$$y'' + (2-a)y' + 4y = 1.$$

a) Za vrednost $a = 0$ rešite diferencialno enačbo.

b) Za katere vrednosti parametra a je rešitev homogenega dela periodična?

Rešitev:

a) To je nehomogena linearna diferencialna enačba drugega reda s konstantnimi koeficienti.

(i) Homogeni del:

$$y'' + 2y' + 4y = 0.$$

Uporabimo nastavek $y = \mathrm{e}^{\lambda x}$ in dobimo karakteristični polinom $\lambda^2 + 2\lambda + 4 = 0$, ki ima rešitvi $\lambda_{1,2} = -1 \pm \mathrm{i}\sqrt{3}$. Rešitev homogenega dela

$$y_H = \mathrm{e}^{-x}(A\cos(\sqrt{3}x) + B\sin(\sqrt{3}x)).$$

(ii) Partikularno rešitev poiščemo s pomočjo nastavka $y_p = C$. Ko nastavek odvajamo in vse skupaj vstavimo v enačbo, dobimo enakost $4C = 1$, oz. $y_p = \frac{1}{4}$.

Splošna rešitev:

$$y(x) = y_p + y_H = \frac{1}{4} + \mathrm{e}^{-x}(A\cos(\sqrt{3}x) + B\sin(\sqrt{3}x)).$$

b) Rešitev homogenega dela je periodična, ko sta ničli karakterističnega polinoma kompleksni, torej ko je

$$D = (2-a)^2 - 16 = a^2 - 4a - 12 = (a+2)(a-6) < 0.$$

To je izpolnjeno za $-2 < a < 6$.