1. KOLOKVIJ IZ MATEMATIKE 2

Univerzitetni študij

12. april 2013

1. [$25T$] Dane so točke $A(1,2,3)$, $B(2,-2,1)$, $C(1,1,-3)$ in $D(3,-2,-2)$.

   a) Ali so dane točke komplanarne? Odgovor utemeljite!

   b) Če točke niso komplanarne, izračunajte višino piramide ABCD na oglišče D.

Rešitev:

a) Zapišemo tri vektorje

$$\vec{a} = \vec{AB} = (1,-4,-2), \quad \vec{b} = \vec{AC} = (0,-1,-6), \quad \vec{c} = \vec{AD} = (2,-4,-5).$$

Ker je mešani produkt

$$(\vec{a},\vec{b},\vec{c}) = \begin{vmatrix} 1 & -4 & -2 \\ 0 & -1 & -6 \\ 2 & -4 & -5 \end{vmatrix} = 25 \neq 0,$$

vektorji $\vec{a}$, $\vec{b}$ in $\vec{c}$ ter posledično točke A, B, C in D niso komplanarne.

b) Prostornino piramide izrazimo na dva načina

$$\begin{aligned} V_{pir} &= \frac{1}{6}V_{par} = \frac{1}{6}\left|\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right)\right|, \\ V_{pir} &= \frac{1}{3}\mathcal{O}v = \frac{1}{6}\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|. \end{aligned}$$

Sledi

$$v = \frac{\left|\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right)\right|}{\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|} = \frac{25\sqrt{521}}{521}.$$

Pri tem upoštevamo, da je $\vec{a}\times\vec{b} = (22,6,-1)$, $|\vec{a}\times\vec{b}| = \sqrt{521}$ in $(\vec{a},\vec{b},\vec{c}) = 25$.

2. [$25T$] Dana je matrika $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & -2 \\ -1 & 1 & 3 \\ -3 & 2 & a \end{bmatrix}$.

   a) Za katero vrednost parametra a matrika A ni obrnljiva?

   b) Izračunajte inverzno matriko A^{-1} za vrednost $a = 9$.

Rešitev:

a) Matrika A ni obrnljiva (je singularna), ko je

$$\det A = 5a - 44 = 0.$$

Sledi $a = \frac{44}{5}$.

b) V primeru $a = 9$ je $\det A = 1$, matrika kofaktorjev pa $\tilde{A} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ -40 & 3 & -14 \\ 14 & -1 & 5 \end{bmatrix}$. Inverzna matrika je tedaj

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\tilde{A}^T = \begin{bmatrix} 3 & -40 & 14 \\ 0 & 3 & -1 \\ 1 & -14 & 5 \end{bmatrix}.$$

3. $[25T]$ Dan je sistem enačb

$$\begin{aligned} 2x + ay + 8z &= 2, \\ x - 3y + z &= 4, \\ -x + 2y + az &= -1. \end{aligned}$$

a) Obravnavajte sistem enačb glede na parameter a. V primeru, da je sistem rešljiv, poiščite rešitev.

b) Ali je rešitev v primeru $a = 0$ celoštevilska? Odgovor utemeljite!

Rešitev:

a) Redukcija razširjene matrike koeficientov

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 1 & 4 \\ 2 & a & 8 & 2 \\ -1 & 2 & a & -1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 1 & 4 \\ 0 & a+6 & 6 & -6 \\ 0 & -1 & a+1 & 3 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & a+1 & 3 \\ 0 & 0 & (a+3)(a+4) & 3(a+4) \end{array}\right]$$

Obravnava primerov

i) $a = -3$: ni rešitve

ii) $a = -4$: ∞ rešitev

$$x = -10z - 5, \quad y = -3z - 3, \quad z = \text{poljuben}$$

iii) $a \neq -3$, $a \neq -4$: natanko ena rešitev

$$x = \frac{4a - 9}{a + 3}, \quad y = \frac{-6}{a + 3}, \quad z = \frac{3}{a + 3}$$

b) V primeru $a = 0$ je rešitev $x = -3$, $y = -2$ in $z = 1$, torej celoštevilska.

4. $[25T]$ Dana je matrika $A = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 3 \\ -2 & -3 & -3 \\ -4 & -4 & 3 \end{bmatrix}$.

a) Določite lastne vrednosti matrike A.

b) Poiščite tisti lastni vektor, ki pripada lastni vrednosti, ki zadošča pogoju $|\lambda - 5| = 2$.

Rešitev:

a) Lastne vrednosti matrike A so rešitve enačbe

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 4 & 3 \\ -2 & -3-\lambda & -3 \\ -4 & -4 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)(\lambda^2 - 1) = (3-\lambda)(\lambda - 1)(\lambda + 1) = 0$$

Dobimo tri lastne vrednosti $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 1$ in $\lambda_3 = 3$.

b) Lastni vektor izračunamo za lastno vrednost $\lambda_3 = 3$

$$A - 3I = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 3 \\ -2 & -6 & -3 \\ -4 & -4 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 3 \\ 0 & 4 & 3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad x_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ -3 \\ 4 \end{bmatrix}.$$