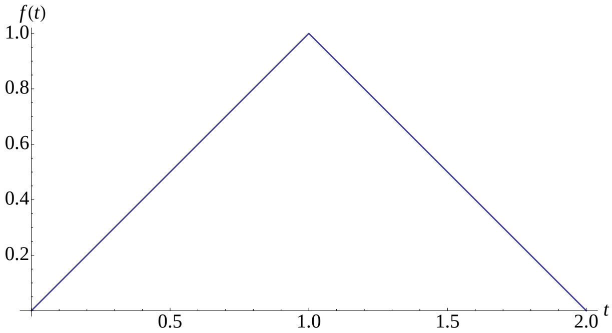
REŠITVE

Naloga 1 (25 točk)

Časovna funkcija f je definirana za $t \in [0, 2]$ in podana s spodnjim grafom.



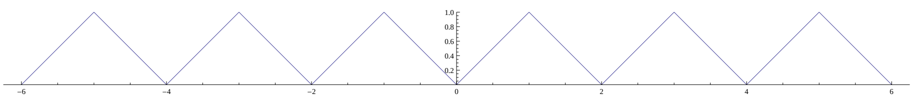
a.) Narišite tri grafe: graf (klasične) Fourierove vrste, graf sinusne Fourierove vrste in graf kosinusne Fourierove vrste funkcije f. Grafe prikažite na intervalu $[-6, 6]$.

b.) Izračunajte še konstantne (prve) člene vseh treh funkcijskih vrst.

c.) Napišite tri primere neničelnih periodičnih funkcij, katerih Fourierove vrste na intervalu $[-2, 2]$ imajo končno mnogo členov: prva funkcija naj bo liha, druga soda, tretja pa ne liha ne soda.

Rešitev:

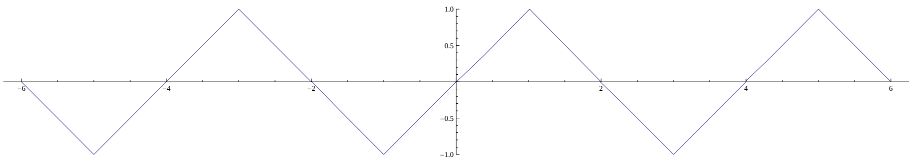
a.) *Grafi (klasične) Fourierove vrste, sinusne Fourierove vrste in kosinusne Fourierove vrste funkcije f so na spodnjih slikah.*



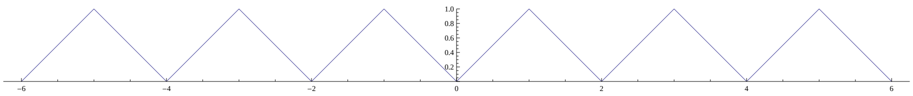
Slika 1: Klasična Fourierova vrsta.

b.) *Konstantni členi vrst so povprečja funkcije f na danem intervalu oziroma povprečja njenega lihega ali sodega nadaljevanja na negativno stran:*

- *klasična Fourierova vrsta na* $[0, 2]$: $\frac{1}{2}$,
- *sinusna Fourierova vrsta na* $[-2, 2]$: 0,
- *kosinusna Fourierova vrsta na* $[-2, 2]$: $\frac{1}{2}$.



Slika 2: Sinusna Fourierova vrsta.



Slika 3: Kosinusna Fourierova vrsta.

c.) Primeri periodičnih funkcij, katerih Fourierove vrste na intervalu $[-2, 2]$ *imajo končno mnogo členov:*

- *liha:* $\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)$,
- *soda:* 1 *ali* $\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)$,
- *ne liha ne soda:* $1 + \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)$.

Naloga 2 (25 točk)

Tri premice so podane z enačbami $x = 0$, $y = 0$ in $x - y + 1 = 0$. Poiščite točko $M(x, y)$, za katero velja, da je vsota kvadratov razdalj od treh premic do točke M minimalna. Odgovor utemeljite!

Vsoto kvadratov razdalj od teh treh premic do točke M tudi izračunajte.

Pri računanju si lahko pomagate s formulo za izračun razdalje točke $T(x_0, y_0)$ od premice p z enačbo $ax + by + c = 0$, ki se glasi $d(T, p) = \dfrac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$.

Rešitev:

Vsota kvadratov razdalj točke $M(x, y)$ *od danih premic je funkcija*

$$d(x, y) = x^2 + y^2 + \frac{(x - y + 1)^2}{2}.$$

Poiščimo njene stacionarne točke:

$$\begin{aligned} d_x &= 1 + 3x - y, \\ d_y &= -1 - x + 3y. \end{aligned}$$

Dobimo eno rešitev: $x = -\frac{1}{4}$ *in* $y = \frac{1}{4}$. *Funkcija* d *je zvezna, odvedljiva in definirana na* $\mathbb{R}$. *Zaradi tega je dobljena stacionarna točka edini kandidat za ekstrem funkcije* d. *Ker je iz geometrijskega opisa jasno, da točka, v kateri je vrednost* $d(x, y)$ *najmanjša, obstaja, velja*

$$M\left(-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right).$$

Velja

$$d\left(-\frac{1}{4},\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{4}.$$

Naloga 3 (25 točk)

Poiščite splošno rešitev $y(x)$ diferencialne enačbe

$$(2xy-1)\,dx+x^2\,dy=0.$$

Odvod y' splošne rešitve diferencialne enačbe zapišite kot funkcijo spremenljivk x in y.

Rešitev:

Ker za

$$\begin{aligned} P(x,y) &= 2xy-1, \\ Q(x,y) &= x^2 \end{aligned}$$

velja

$$\begin{aligned} P_y(x,y) &= 2x, \\ Q_x(x,y) &= 2x, \end{aligned}$$

je dif. enačba eksaktna. Ne levi strani enačbe je totalni diferencial $df(x,y)=f_x(x,y)\,dx+f_y(x,y)\,dy$ neke funkcije $f(x,y)$. Funkcijo f dobimo s pomočjo zvez

$$\begin{aligned} f_x(x,y) &= P(x,y) &= 2xy-1, \\ f_y(x,y) &= Q(x,y) &= x^2. \end{aligned}$$

Prvo enačbo najprej integrirajmo po x, nato rezultat parcialno odvajajmo po y:

$$\begin{aligned} f(x,y) &= \int (2xy-1)\,dx = x^2y-x+C(y), \\ f_y(x,y) &= x^2+C'(y). \end{aligned}$$

Po primerjavi f_y in Q ugotovimo

$$f(x,y)=x^2y-x+D,$$

kjer je D splošna konstanta. Ker začetna enačba pravi $df(x,y)=0$, sledi implicitna oblika splošne rešitve:

$$x^2y-x=konst.$$

Rešitev lahko zapišemo tudi eksplicitno:

$$y=\frac{x+konst}{x^2}.$$

Če začetno dif. enačbo delimo z dx, dobimo

$$(2xy - 1) + x^2 y' = 0.$$

Sledi

$$y' = \frac{1 - 2xy}{x^2}.$$

Naloga 4 *(25 točk)*

Rešite diferencialno enačbo

$$y''' - y' = 2x + \sin(3x).$$

Določite vse rešitve, ki potekajo skozi koordinatno izhodišče.

Rešitev:

Dana dif. enačba je linearna s konstantnimi koeficienti. Splošna rešitev bo zato oblike $y = y_h + y_p$, kjer je y_h rešitev homogene enačbe, y_p pa partikularna rešitev nehomogene enačbe.

- Homogena enačba:

$$y''' - y' = 0.$$

  Preko nastavka $y = e^{\lambda x}$ dobimo karakteristično enačbo in njene rešitve:

$$\begin{aligned} \lambda^3 - \lambda &= 0, \\ \lambda(\lambda^2 - 1) &= 0, \\ \lambda(\lambda - 1)(\lambda + 1) &= 0, \\ \lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = 1,\ \lambda_3 = -1. \end{aligned}$$

  Sledi $y_h = C_1 + C_2 e^x + C_3 e^{-x}$.

- Nehomogena enačba:

$$y''' - y' = 2x + \sin(3x).$$

  Metoda inteligentnega ugibanja nas vodi do nastavka

$$y_p = (Ax + B)x + C\sin(3x) + D\cos(3x),$$

  saj je $\alpha + i\beta = 0$ enkratna rešitev karakteristične enačbe, $\alpha + i\beta = 3i$ pa ni rešitev. Ko nastavek odvajamo in vstavimo v enačbo, dobimo:

$$-30C\cos(3x) + 30D\sin(3x) - 2Ax - B = 2x + \sin(3x).$$

  Enačba razpade na toliko enačb, kolikor je v njej linearno neodvisnih funkcij:

$$\begin{aligned} 1: &\quad -B &= 0, \\ x: &\quad -2A &= 2, \\ \sin(3x): &\quad 30D &= 1, \\ \cos(3x): &\quad -30C &= 0. \end{aligned}$$

Sledijo vrednosti koeficientov iz nastavka: $A = -1$, $B = 0$, $C = 0$ in $D = \frac{1}{30}$. Partikularna rešitev je zato

$$y_p = -x^2 + \frac{1}{30}\cos(3x).$$

Splošna rešitev:

$$y = y_h + y_p = C_1 + C_2 e^x + C_3 e^{-x} - x^2 + \frac{1}{30}\cos(3x).$$

Skozi koordinatno izhodišče potekajo tiste rešitve, ki zadoščajo pogoju $y(0) = 0$. To so tiste funkcije iz 3-parametrične splošne rešitve, za katere velja

$$0 = C_1 + C_2 + C_3 + \frac{1}{30}$$

oziroma

$$C_1 = -C_2 - C_3 - \frac{1}{30}.$$

Take funkcije, ki jih je neskončno mnogo, tvorijo 2-parametrično družino:

$$y = -C_2 - C_3 - \frac{1}{30} + C_2 e^x + C_3 e^{-x} - x^2 + \frac{1}{30}\cos(3x).$$