2. KOLOKVIJ IZ MATEMATIKE 2

Univerzitetni študij

4. junij 2014

1. [25T] Razvijte funkcijo $f(x) = \dfrac{x+2}{x^2+4x+3}$ v Taylorjevo vrsto v okolici točke $a = 2$.

Rešitev:
Uvedemo novo spremenljivko $y = x - 2$ oz. $x = y + 2$ in zapišemo novo funkcijo

$$g(y) = \frac{y+4}{(y+2)^2+4(y+2)+3} = \frac{y+4}{(y+3)(y+5)} = \frac{A}{y+3} + \frac{B}{y+5} = \frac{(A+B)y+5A+3B}{(y+3)(y+5)},$$

ki jo razbijemo na parcialne ulomke in dobimo sistem enačb $A + B = 1$ in $5A + 3B = 4$, ki ima rešitev $A = B = \frac{1}{2}$. Z uporabo geometrijske vrste sledi

$$\begin{aligned} g(y) &= \frac{\frac{1}{2}}{y+3} + \frac{\frac{1}{2}}{y+5} = \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{1-(-\frac{y}{3})} + \frac{1}{10}\cdot\frac{1}{1-(-\frac{y}{5})} \\ &= \frac{1}{6}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{y}{3}\right)^n + \frac{1}{10}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{y}{5}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2}\left(\frac{1}{3^{n+1}} + \frac{1}{5^{n+1}}\right)y^n \end{aligned}$$

Z obratno substitucijo dobimo razvoj funkcije $f(x)$ v Taylorjevo vrsto okrog točke $a = 1$

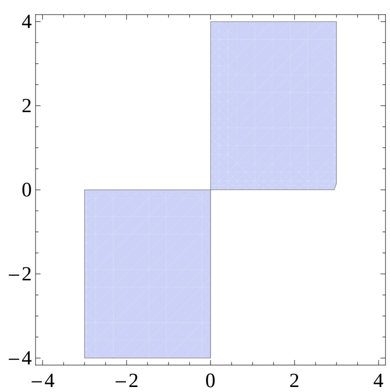
$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2}\left(\frac{1}{3^{n+1}} + \frac{1}{5^{n+1}}\right)(x-2)^n.$$

2. [25T] Dana je funkcija
$$f(x,y) = \arcsin\frac{x}{3} + \ln(2xy).$$

a) Poiščite in skicirajte definicijsko območje dane funkcije.
b) Ali ima dana funkcija lokalne ekstreme? Odgovor utemeljite!

Rešitev:

a) Iz pogojev $-1 \le \frac{x}{3} \le 1$ in $2xy > 0$ sledi $\mathcal{D}_f = \{(x,y); -3 \le x \le 3, xy > 0\}$.



Slika 1: Slika definicijskega območja.

b) Odvajamo in dobimo
$$f_x = \frac{1}{\sqrt{9-x^2}} + \frac{1}{x}, \quad f_y = \frac{1}{y}.$$

Kandidate za ekstreme dobimo tam, kjer sta oba prva parcialna odvoda enaka 0, vendar je $f_y \neq 0$ povsod, zato funkcija f nima lokalnih ekstremov.

3. a) [20T] Rešite diferencialno enačbo

$$xy' = 2x^3 \mathrm{e}^{x^2} + y.$$

b) [5T] Poiščite tisto rešitev, ki zadošča pogoju $y(1) = 0$.

Rešitev:

a) To je linearna diferencialna enačba prvega reda. Homogeni del rešimo z ločitvijo spremenljivk

$$\begin{aligned} xy' - y &= 0 \\ \int \frac{dy}{y} &= \int \frac{dx}{x} \\ \ln y &= \ln x + \ln C \\ y_H &= Cx \end{aligned}$$

Partikularno rešitev poiščemo z variacijo konstante. Izraza za $y = C(x)x$ in $y' = C'(x)x + C(x)$ vstavimo v enačbo in dobimo $C'(x) = 2x\mathrm{e}^{x^2}$. Z vpeljavo nove spremenljivke sledi

$$C(x) = \int 2x\mathrm{e}^{x^2}\, dx = \mathrm{e}^{x^2} \quad \text{in} \quad y_p = x\mathrm{e}^{x^2}.$$

Splošna rešitev je

$$y = Cx + x\mathrm{e}^{x^2}.$$

b) Z upoštevanjem začetnega pogoja $y(1) = C + \mathrm{e} = 0$ dobimo $C = -\mathrm{e}$ in

$$y = x\left(\mathrm{e}^{x^2} - \mathrm{e}\right).$$

4. [25T] Rešite diferencialno enačbo

$$2y'' - y' - y = (x+1)\mathrm{e}^x.$$

Rešitev:
To je nehomogena linearna diferencialna enačba drugega reda s konstantnimi koeficienti. Homogeni del $2y'' - y' - y = 0$ rešimo z nastavkom $y = e^{\lambda x}$, da dobimo karakteristično enačbo $2\lambda^2 - \lambda - 1 = (2\lambda + 1)(\lambda - 1) = 0$ in

$$y_H = Ae^{-\frac{1}{2}x} + Be^x.$$

Partikularno rešitev dobimo z nastavkom

$$\begin{aligned} y_p &= (Cx^2 + Dx)e^x, \\ y_p' &= (Cx^2 + (2C + D)x + D)e^x, \\ y_p'' &= (Cx^2 + (4C + D)x + 2C + 2D)e^x, \end{aligned}$$

ki ga vstavimo v enačbo in iz primerjave koeficientov dobimo $C = \frac{1}{6}$ in $D = \frac{1}{9}$. Sledi

$$y_p = \left(\frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{9}x\right)e^x.$$

Rešitev diferencialne enačbe je

$$y(x) = Ae^{-\frac{1}{2}x} + Be^x + \frac{1}{6}x^2e^x + \frac{1}{9}xe^x.$$