Izpit iz Matematike III

6. junij 2006

1. Vzemimo ploskev

$$\vec{r}(u,v) = (2u\cos v - \sqrt{2},\ 2u\sin v + 1,\ 4u - 4v - 4)$$

in koordinatni krivulji

$$\begin{aligned} \vec{r}_1(t) &= (2\cos t - \sqrt{2},\ 2\sin t + 1,\ -4t) \\ \vec{r}_2(t) &= (t\sqrt{2} - \sqrt{2},\ t\sqrt{2} + 1,\ 4t - \pi - 4). \end{aligned}$$

Poiščite presečišče koordinatnih krivulj $\vec{r}_1, \vec{r}_2$ in enačbo tangentne ravnine na ploskev $\vec{r}(u,v)$ v tem presečišču.

2. Zamenjajte vrstni red integriranja

$$\int_{-\frac{9}{4}}^{-2} dx \int_{\frac{1-\sqrt{9+4x}}{2}}^{\frac{1+\sqrt{9+4x}}{2}} dy \ + \ \int_{-2}^{0} dx \int_{\frac{3}{x+3}-3}^{\frac{1+\sqrt{9+4x}}{2}} dy \ + \ \int_{0}^{2} dx \int_{-\sqrt{4-2x}}^{\frac{3}{x+1}-1} dy.$$

Nato integral tudi izračunajte.

3. S pomočjo Gaussove formule izračunajte pretok vektorskega polja

$$\vec{V} = \left(x - e^{yz} + 2xz,\ \sin(xz) - \frac{y}{3},\ \arctan(x^2y^2) - z^2 - \frac{2z}{5}\right)$$

skozi zaključeno ploskev, ki je rob telesa, dobljenega s preseki

$$x^2 + y^2 \leq 1, \quad z \leq 2 - x^2 - 2y^2 \ \text{ in } \ z \geq x^2 + y^2 - 3.$$

4. S pomočjo kompleksne integracije izračunajte

$$\int_0^\infty \frac{18}{(x^2+4)(x^2+1)^2}\, dx.$$